Éditions du CLIM

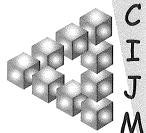




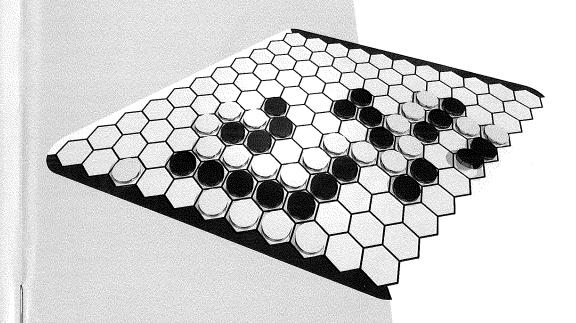
John Nash

Inventé indépendamment par le danois Piet Hein et l'américain John Nash dans les années 40, le jeu de Hex va vous surprendre par la simplicité de ses règles et par la richesse des mécanismes tactiques et stratégiques mis en œuvre.

Ce livret d'accompagnement contient, outre les règles du jeu et quelques variantes, des explications sur les stratégies élémentaires qui permettront aux débutants de progresser rapidement, ainsi que des problèmes de niveaux progressifs pour tester vos capacités de raisonnement. Il contient par ailleurs une partie sur les mathématiques du jeu de Hex, petite introduction à la théorie des jeux.



Jeu de Hex



Jeu de tactique et stratégie à partir de 6 ans

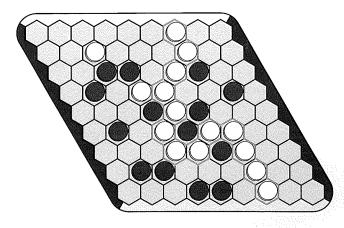


www.cijm.org

Règles du jeu

Matériel. Le jeu de Hex se joue à deux avec des pions noirs et des pions blancs sur un plateau en forme de losange pavé par des hexagones. Deux bords opposés du plateau sont blancs et les deux autres sont noirs. Le jeu qu'accompagne ce livret comporte des plateaux de tailles 9, 11, 14 et 19.

Règles. L'un des deux joueurs a les blancs. L'autre a les noirs. Le joueur qui a les pions blancs commence. Il place un de ses pions sur une case de son choix. Ensuite, chaque joueur place à son tour un de ses pions sur une case libre de son choix. Le premier joueur à avoir relié les deux bords de sa couleur avec ses pions a gagné.



Dans la partie ci-dessus, les blancs ont gagné car un chemin de pions blancs relie les deux bords blancs.

Vous connaissez les règles...Vous pouvez jouer!

pour les joueurs expérimentés : l'inversion

L'expérience montre, lorsque deux joueurs de niveau élevé jouent entre eux, que celui qui commence a un petit avantage. On peut, à ce niveau, ajouter la règle suivante : lors de leur premier coup, les noirs, au lieu de jouer sur une case vide, ont le droit d'*inverser*, c'est-à-dire de remplacer le premier pion blanc par leur propre pion. Ainsi, les blancs sont forcés de trouver un compromis entre un coup très faible et un coup trop fort au début (la case centrale par exemple).

En hommage à Claude Berge (1926-2002), mathématicien français, l'un des pères de la théorie moderne des graphes et grand joueur de Hex.

Le jeu de Hex et le CIJM

Le jeu de Hex, introduit successivement par Piet Hein en 1942 sous le nom *polygone* puis en 1948 par John Nash, est un merveilleux outil pour lever le voile sur certains aspects des mathématiques abstraites. Des règles simples, assimilées en quelques instants, permettent à tous, petits et grands, joueurs expérimentés ou non, d'entrer très rapidement dans le jeu...

Le Comité International des Jeux Mathématiques (voir page 31) a conçu cette édition, enrichie du présent livret. C'est une porte d'entrée vers le jeu de Hex, bien entendu, mais aussi une invitation à la découverte de sa richesse et de la variété des mécanismes mis en jeu ainsi que des notions mathématiques et scientifiques qui interviennent dans l'étude plus abstraite du jeu de Hex.

La notion de preuve. Comment montrer que, pour une position de jeu donnée, un certain coup est le meilleur? En le démontrant, bien sûr! La notion de démonstration prend ici tout son sens. La preuve n'est plus une notion abstraite mais un outil dont l'efficacité est mesurable et convaincante : une suite de bons coups mènera à la victoire tandis que des mauvais coups mèneront à la défaite.

Topologie. Le pavage hexagonal du plan, ou son dual triangulaire (voir page 4), possède de nombreuses propriétés géométriques spécifiques mises en avant par le jeu de Hex. Par exemple, on démontre (voir Jeu de Hex et mathématiques, page 9) qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex (ce ne serait pas vrai sur un pavage carré).

Théorie des jeux et intelligence artificielle. Les jeux offrent une source inépuisable de problèmes mathématiques. Comment définir ce qu'est un bon coup? un coup gagnant? Comment prouver qu'une méthode est infaillible? Comment faire jouer un ordinateur à Hex ou aux Échecs? Une partie de la réponse est commune aux deux jeux. Cette partie est celle traitée par la théorie des jeux, ces deux jeux étant des modèles de jeux à information complète et parfaite, sans hasard. Il y a une partie plus spécifique due au fait que, sous une apparente simplicité, le jeu de Hex possède une combinatoire plus compliquée que

le jeu d'Échecs (il y a plus de coups possibles). Ainsi, encore aujourd'hui, plusieurs équipes de chercheurs dans le monde essaient d'améliorer des méthodes pour jouer au jeu de Hex, certaines déterministes (elles donnent toujours le même résultat dans une situation donnée), d'autres probabilistes (elles font entrer une partie de hasard et donnent des résultats légèrement différents dans une même situation, ce qui est probablement plus proche du raisonnement humain).

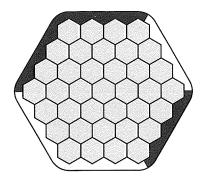
N'oubliez pas, il faut d'abord jouer puis chercher à mettre au point des stratégies gagnantes (des plus simples aux plus complexes). Cette brochure est là pour vous aider!

Règles du jeu	2
Le jeu de Hex et le CIJM	3
Variantes	4
Tactique et stratégie - niveau 1	5
Jeu de Hex et mathématiques	9
Tactique et stratégie - niveau 2	17
Problèmes	20
Solution des problèmes	28

5

Variantes

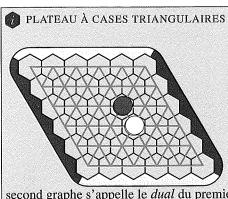
Plateaux de formes différentes. Il est possible de jouer au jeu de Hex sur des plateaux de n'importe quelle forme, pourvu qu'ils aient deux bords noirs et deux bords blancs. Voici un exemple de plateau hexagonal.



Vous remarquerez qu'il n'est pas nécessaire que les bords soient tous de la même taille.

L'Antihex. Le but du jeu est inversé : le premier joueur qui relie ses deux bords a perdu. Cette variante est moins riche que le jeu de Hex lui-même mais peut-être amusante jouée sur des plateaux de petite taille (4 ou 5) pour des parties courtes.

Nous verrons dans la partie *Jeu de Hex et mathématiques*, page 9 qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex : l'un des deux joueurs finit nécessairement par former un chemin. Par conséquent, il ne peut pas non plus y avoir de partie nulle à l'Antihex : l'un des deux joueurs finira par perdre.



Il arrive parfois que des plateaux de Hex aient des cases triangulaires et non hexagonales. Dans ce cas, les joueurs ne posent pas leurs pions à l'intérieur des cases mais aux intersections du réseau. En fait, cela revient au même. En mathématiques, quand on a un graphe planaire, on peut construire un second graphe. Ce

second graphe s'appelle le *dual* du premier. Le jeu sur un plateau à cases triangulaires utilise le fait que le réseau triangulaire est le dual du réseau hexagonal.

Tactique et stratégie - niveau 1

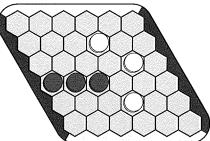
L'attaque et la défense. Au jeu de Hex comme dans beaucoup d'autres jeux, il est possible de jouer en *attaque* ou en *défense*. Attaquer, c'est chercher à réaliser son propre objectif, c'est-à-dire à relier ses deux bords. Défendre, au contraire, c'est empêcher l'adversaire de réaliser le sien, c'est-à-dire tenter de bloquer ses chemins.

Il est important de savoir quand on débute au jeu de Hex qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle. Nous démontrerons ce fait *mathématiquement* dans la partie suivante (page 9). Ceci a une conséquence majeure : un joueur qui jouerait exclusivement en défense, c'est-à-dire qui ne chercherait qu'à bloquer son adversaire sans se soucier le moins du monde de son propre chemin, finirait automatiquement par en former un sans s'en préoccuper. Cette façon de jouer est assez puissante quand on commence à jouer. Si deux joueurs débutants jouent, l'un exclusivement en attaque et l'autre en défense, le second gagnera en moyenne plus souvent que le premier!

Vitesse et maillons. Un paramètre important du jeu de Hex est la vitesse. Vous observerez en effet rapidement en jouant que toute perte de temps (c'est-à-dire coup qui ne sert à rien) sera très vite sanctionnée. Un mauvais coup ne donne pas en soi un avantage à l'adversaire (un pion blanc ne peut pas faire partie d'un chemin noir et réciproquement). Cependant, il permet à l'adversaire de gagner un temps sur vous et de progresser plus vite. Ainsi, si vous êtes mal parti sur une partie du plateau, une bonne solution est souvent d'attaquer ailleurs.

La technique de base permettant d'avancer plus vite que d'une case par pion est l'avancée par *maillons*. Deux pions forment un maillon s'ils sont disposés comme sur la figure ci-contre (où les cases A et B sont inoccupées). Un maillon assure de pouvoir connecter les deux pions quoi qu'il arrive. En effet, si les noirs jouent en A, alors les blancs peuvent jouer en B. Et si les noirs jouent en B, les blancs peuvent jouer en A.

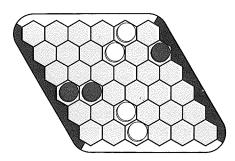




En pratique, on a rarement intérêt à relier deux pions en maillon tant que l'adversaire n'attaque pas ce maillon. En effet, cela perd un temps, que l'adversaire pourra peut-être utiliser ailleurs pour construire son propre chemin. Par exemple, dans la situation ci-contre, les blancs peuvent gagner à coup sûr parce que les noirs ont perdu du temps à essayer de faire un chemin « sans trou ». Il est clair que la stratégie

des blancs a été bien plus payante que celle des noirs.

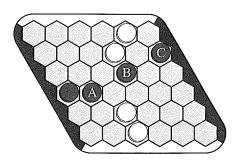
Cette configuration en maillons revêt une importance capitale au jeu de Hex. En général, les joueurs essaieront, dans un premier temps, de former un chemin de pions reliés par des maillons. La configuration ci-contre proche du bord peut aussi être considérée comme un maillon dans la mesure où, pour les mêmes raisons que précédemment, elle permet aux noirs d'assurer la liaison avec le bord.

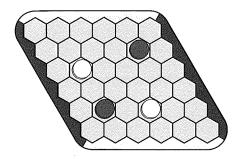


Exemple 1. C'est aux noirs de jouer. Essayez de trouver le coup qui leur permet de gagner quel que soit le jeu des blancs.

Solution. Les noirs doivent jouer sur la case B ci-contre. De cette façon ils créent deux maillons, l'un reliant A et B, l'autre B et C.

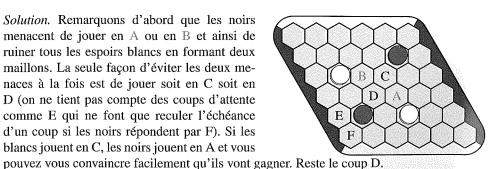
Vous pouvez essayer de vous convaincre que si les noirs jouent sur n'importe quelle autre case, alors ce sont les blancs qui deviennent gagnants car ils menacent eux aussi de créer plusieurs maillons entre leurs pions.



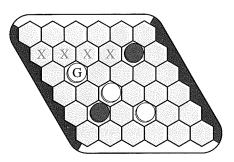


Exemple 2. Dans la situation ci-contre, si vous avez les blancs, où jouez-vous?

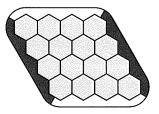
Solution. Remarquons d'abord que les noirs menacent de jouer en A ou en B et ainsi de ruiner tous les espoirs blancs en formant deux maillons. La seule façon d'éviter les deux menaces à la fois est de jouer soit en C soit en D (on ne tient pas compte des coups d'attente comme E qui ne font que reculer l'échéance d'un coup si les noirs répondent par F). Si les blancs jouent en C, les noirs jouent en A et vous

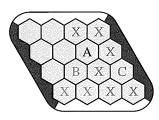


Dans ce cas, les blancs n'auront plus qu'à relier G au bord du haut. Cette situation est un cas particulier d'une technique qui sera abordée dans le niveau 2 de tactique. Les blancs menacent de gagner par quatre coups différents (X). Il est assez facile de se convaincre que les noirs ne peuvent pas parer toutes les menaces à la fois. Ainsi, les blancs sont sûrs de gagner dans cette situation.



Le jeu sur un plateau 4×4 . Vous avez les blancs. Où jouez-vous? Pouvez-vous trouver tous les coups qui permettent aux blancs de gagner?

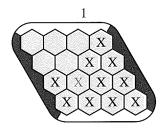


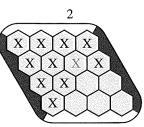


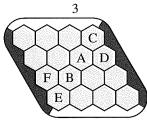
Solution. Si les blancs jouent en A, alors ils menacent de gagner en jouant soit en B soit en C. Dans le premier cas, ils ont besoin que les cases rouges restent libres pour gagner et dans le deuxième que les cases bleues restent libres pour gagner. Pour que les noirs empêchent les blancs de gagner, il faudrait qu'il puissent se mettre à la fois sur une case rouge et une case bleue ce qui n'est pas possible en un coup. Re-

marquons que les cases qui ne sont pas marquées ne servent à rien dans cette stratégie.

Si les blancs laissent libre l'un des deux ensembles de cases des diagrammes 1 et 2 cidessous, alors les noirs peuvent adopter la stratégie décrite précédemment pour les blancs en jouant sur la case rouge (X):







Il faut donc que les blancs jouent dans ces deux ensembles à la fois, c'est-à-dire sur l'une des cases marquées sur le diagramme 3. Comme on sait déjà que A et B sont des coups gagnants, il suffit de vérifier C et D (E et F sont leurs symétriques).



Si les blancs jouent en C, les noirs doivent jouer dans l'une des cases marquées ci-contre en rouge. En effet, si les noirs jouent ailleurs, alors l'un des deux coups A et B reste gagnant pour les blancs (pour les mêmes raisons qu'avant). De plus à cause de la menace des blancs en G, les noirs n'ont en fait que deux choix possibles marqués Y et Z. Pour le premier, la suite de coups suivante est forcée pour les noirs

sauf au quatrième coup où les deux coups possibles ont été marqués :



donc les blancs gagnent.

Si les noirs jouent le coup marqué \mathbb{Z} , les blancs, en jouant le coup ci-contre, créent deux menaces pour le cinquième coup (marquées en rouge). Par conséquent, la suite de coups suivante est forcée pour les noirs :





et les blancs gagnent.

Si les blancs jouent en D (sur le diagramme 3 de la page précédente), les noirs gagnent en jouant la suite de coups cicontre, forcée pour les blancs.

Pour résumer, les coups gagnants pour les blancs au départ sont exactement les cases de la petite diagonale du plateau (A, B, C et E).



Jeu de Hex et mathématiques

Il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex. En effet, que serait une partie nulle au jeu de Hex? Ce serait une partie où tout le plateau serait rempli de pions blancs et noirs (sinon, on pourrait continuer à jouer) mais où aucun chemin blanc entre les deux bords blancs ou noir entre les deux bords noirs ne serait présent. Remarquons qu'il ne peut pas y avoir en même temps un chemin blanc reliant les bords blancs et un chemin noir reliant les bords noirs. En effet, si deux tels chemins existaient, ils se « croiseraient » forcément.



L'idée *intuitive* est que, lorsque le plateau est rempli, si l'on regarde l'ensemble des pions blancs (X) liés au bord blanc du haut, alors, soit il touche le bord blanc du bas et les blancs ont gagné, soit il ne le touche pas et cet ensemble a une frontière de pions noirs (Y) qui relie alors les deux bords noirs et les noirs ont gagné.

Pour prouver ce résultat de façon rigoureuse, on va supposer qu'une fourmi part du coin en haut à gauche et se déplace en suivant la règle suivante :

- si elle rencontre le bord du bas ou le bord de droite, elle s'arrête;
- sinon, elle avance en laissant du blanc (un pion ou un bord) à sa gauche et du noir à sa droite (un pion ou un bord).

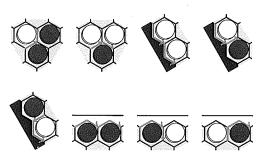
Par exemple, dans l'exemple précédent, elle aurait suivi le chemin marqué en rouge. Remarquons alors plusieurs choses :

- La fourmi peut partir dans tous les cas du coin en haut à gauche mais jamais y revenir :

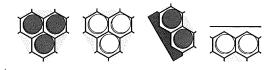


(en effet, il n'y a pas de chemin qui revient en haut à gauche avec du blanc à gauche et du noir à droite).

 Dans tous les cas de figure, en chaque sommet qui n'est pas dans un coin, il y a soit exactement une entrée et une sortie :



soit aucune entrée et aucune sortie :

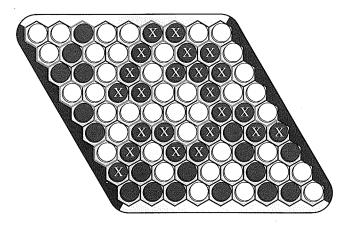


(les diagrammes se lisent à rotations près, bien entendu).

Par conséquent, la fourmi peut toujours avancer tant qu'elle n'a pas atteint le bord du bas ou de droite et elle ne peut pas revenir deux fois au même endroit (en effet, la première fois où elle reviendrait à un endroit déjà visité, cela signifierait que le sommet en question a deux entrées). Du coup, comme le nombre de sommets est fini, son trajet ne peut pas être infini et on en déduit qu'elle atteindra obligatoirement à un moment le bord de droite ou le bord du bas.

Supposons qu'elle atteigne le bord de droite en premier. Regardons le chemin qu'elle a parcouru depuis la dernière fois où elle a quitté le bord de gauche (comme elle était au début sur le bord de gauche, elle l'a au moins quitté une fois). Ce chemin est entièrement bordé de noir à droite puisqu'elle laisse toujours du noir sur sa droite. Comme elle n'est pas passée par l'un des bords noirs pendant cette partie de son trajet, le noir qu'elle avait à sa droite était forcément constitué de pions. Du coup il y a un chemin de pions noirs reliant les deux bords noirs.

Si elle atteint le bord du bas en premier, on peut montrer de la même façon qu'il y a un chemin de pions blancs reliant les deux bords blancs. On a donc bien prouvé qu'il y a soit un chemin blanc reliant les bords blancs, soit un chemin noir reliant les bords noirs lorsque le plateau est rempli. Il ne peut donc pas y avoir de partie nulle. Un autre exemple, pour se convaincre :



La dernière partie du trajet rouge est bordée à droite de pions noirs X qui relient les deux bords noirs; notez que l'on trouve un chemin noir parmi d'autres et que ce n'est pas forcément le plus court.

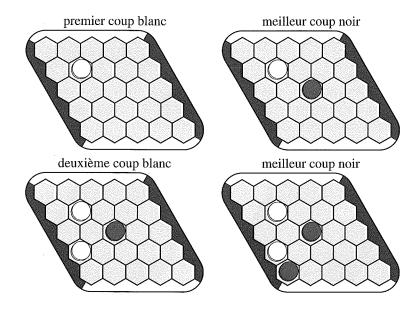
POUR ALLER PLUS LOIN

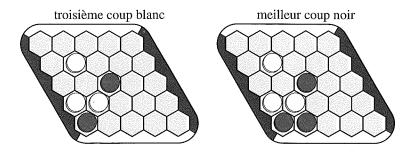
Si on laissait la fourmi continuer selon le même principe après avoir touché le bord de droite alors elle ne toucherait jamais le bord du bas (et inversement si elle a touché le bord du bas en premier). On peut même voir qu'elle finirait coincée en haut à droite (si les noirs ont gagné) ou en bas à gauche (si les blancs ont gagné). Savez-vous le démontrer?

Il y a une stratégie gagnante pour les blancs. On va maintenant voir qu'il existe une stratégie qui permet de gagner à tous les coups pour les blancs (sur n'importe quelle taille de plateau). Malheureusement, mis à part le cas des petits plateaux, personne ne connait cette stratégie! On se place dans le cas des règles les plus simples (les blancs peuvent jouer n'importe où au premier coup et les noirs n'ont pas le droit d'échanger).

Cette preuve est le cas d'école de ce que l'on appelle en mathématiques une preuve non constructive. On prouve indubitablement que les blancs ont une stratégie gagnante, mais sans pouvoir expliciter cette stratégie.

Tout d'abord, à un tel jeu, où il n'y a pas de partie nulle, et où les deux joueurs ont une information complète, sans hasard, soit les blancs ont une stratégie gagnante, soit les noirs ont une stratégie gagnante (voir la partie *un peu de théorie des jeux*, page 13 pour plus de détails sur cet argument). Supposons donc que les noirs aient une stratégie gagnante. Autrement dit, quel que soit le premier coup des blancs, ils ont un *meilleur coup* (qui dépend du premier coup). Ensuite, quel que soit le deuxième coup des blancs, ils ont un *meilleur coup* et ainsi de suite jusqu'à la fin de la partie où ils auront gagné. Par exemple, on suppose que le début d'une suite de meilleurs coups pour les noirs est :





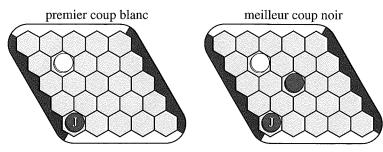
ATTENTION

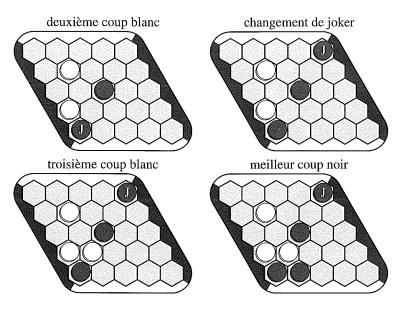
Nous faisons ici une démonstration par l'absurde. On a supposé que la suite de coups était une suite gagnante pour les noirs. Ce n'est bien sûr pas le cas puisqu'on va justement démontrer qu'une telle suite n'existe pas. Il n'est donc pas question de prétendre ici que les noirs ont vraiment joué les meilleurs coups et encore moins les blancs. Il ne s'agit que d'un exemple pour illustrer l'argument qui s'appliquerait à n'importe quelle autre suite de coups. Ainsi, on va prouver que cette suite de coups ne fait pas partie d'une stratégie gagnante pour les noirs, mais aussi qu'aucune autre suite de coups ne fait partie d'une stratégie gagnante pour les noirs.

Maintenant, supposons, juste pour un instant, que les noirs commencent la partie. Laissons les alors placer un pion où ils veulent et appelons ce pion le *pion joker* (par exemple en bas à gauche). Ensuite, les blancs jouent où ils veulent (comme nous cherchons une stratégie gagnante pour les noirs, on doit en fait envisager tous les coups possibles pour les blancs). Les noirs, s'ils oublient le *pion joker*, ont, d'après l'hypothèse, un meilleur coup qui les feraient gagner. De deux choses l'une :

- 1. Soit leur meilleur coup n'est pas au même endroit que le *pion joker*. Dans ce cas, ils jouent ce meilleur coup et leur *pion joker* reste le même pion.
- 2. Soit leur meilleur coup est au même endroit que le *pion joker*. Dans ce cas, ils posent leur nouveau pion sur n'importe quelle case libre et il devient le *pion joker*. L'ancien *pion joker* devient un pion normal. De cette façon, ils se retrouvent dans la même situation que s'ils avaient depuis le début de la partie comme *pion joker* ce nouveau *pion joker* et s'ils avaient toujours appliqué la règle 1.

Par exemple (on considère le même exemple qu'avant) :





Les noirs vont donc jouer une partie qui ressemblera en tout point à une partie où les blancs ont commencé et où les noirs ont suivi leur stratégie gagnante, si ce n'est qu'ils ont un *pion joker* en plus. Il est facile de voir qu'un pion supplémentaire ne fait jamais perdre et n'empêche jamais de gagner au jeu de Hex. Finalement les noirs ont une stratégie gagnante aussi s'ils commencent.

Bien entendu, le jeu est symétrique. Du coup, les blancs ont aussi une stratégie gagnante s'ils commencent, ce qui contredit l'hypothèse que les noirs en avaient une. Cela termine la preuve.

JOUONS UN PEU
La suite de coups présentée en exemple n'est pas gagnante pour les noirs.
Saurez-vous faire gagner les blancs (on enlève le pion joker)? Où doivent-ils poser leur quatrième pion?

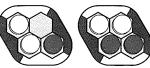
Un peu de théorie des jeux. Ce qui va suivre est un peu technique. Ce n'est pas nécessaire de le lire pour jouer au jeu de Hex. Cette partie a pour but de montrer comment des jeux, tel le jeu de Hex, peuvent être entièrement *formalisés* mathématiquement pour entrer dans une branche des mathématiques que l'on appelle la *théorie des jeux*.

Le jeu de Hex possède les propriétés suivantes :

- il n'y a pas de hasard;
- deux joueurs jouent alternativement;
- les deux joueurs connaissent la situation ;
- la liste des coups possibles pour un joueur est clairement définie par les règles ;
- la liste des positions gagnées ou perdues pour un joueur est clairement définie par les règles;
- il n'y a pas de partie nulle.

Ce qui va suivre peut être facilement adapté à tous les jeux de ce type. Par ailleurs, la dernière condition n'est pas fondamentale, mais l'enlever complique un peu la théorie.

Dans un tel jeu, on peut définir facilement la notion de *position*. Par exemple, dans le jeu de Hex, la position est la configuration du plateau (*i.e.* le nombre de pions de chaque couleur et la position de chacun d'entre eux). À partir d'une position donnée, le joueur qui doit jouer a le choix de donner à son adversaire un certain nombre de positions que tout le monde connait. On peut alors définir *inductivement* (c'est-à-dire « de proche en proche ») les notions de position gagnante et de position perdante en n coups pour un certain joueur; on définira aussi la notion de position impossible. Pour introduire ces définitions, nous allons considérer l'exemple du jeu de Hex de taille 2.



Une position est dite *perdante* en 0 coup pour un certain joueur si c'est une position perdue pour lui (c'est-àdire si un chemin reliant les bords de son adversaire est présent). Par exemple, parmi les deux positions ci-contre,

celle de gauche est perdante en 0 coup pour les noirs et celle de droite est perdante en 0 coup pour les blancs.

Une position est dite *gagnante* en n+1 coups pour un certain joueur si, à partir de cette position, il peut donner à son adversaire au moins une position perdante en n coups et s'il ne peut pas en donner une perdante en moins de n



coups. Ainsi, parmi les deux positions ci-contre, celle de gauche est gagnante en 1 coup pour les blancs (car ils ont moyen de donner aux noirs une position perdante en 0 coup) et celle de droite est gagnante en 1 coup pour les noirs.





Une position est dite *perdante* en n+1 coups pour un certain joueur si, à partir de cette position, il ne peut donner à son adversaire que des positions gagnantes, au maximum en n coups. Par exemple, parmi les deux posi-

tions ci-contre, celle de gauche est perdante en 2 coups pour les noirs et celle de droite est perdante en deux coups pour les blancs.

Une position est dite *impossible* pour un certain joueur (quand il va jouer) s'il n'est pas possible d'après les règles du jeu qu'il reçoive cette position de son adversaire. Par exemple, les positions suivantes sont impossibles :







impossible

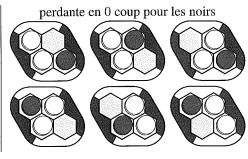
impossible pour les noirs

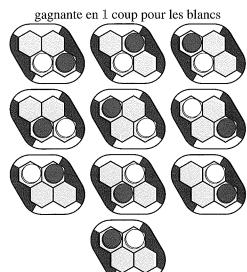
our les noirs impossible pour les blancs

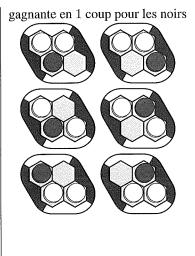
En fait, les seules positions possibles pour les blancs (quand ils s'apprêtent à jouer) ont autant de pions blancs que de pions noirs (puisque les deux joueurs ont joué le même nombre de coups auparavant). De la même façon, les seules positions possibles pour les noirs ont un pion blanc de plus que de pions noirs. De plus, il est impossible pour les blancs de recevoir

FIGURE 1 – Positions gagnantes et perdantes du jeu de Hex de taille 2

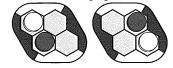
perdante en 0 coup pour les blancs

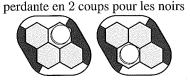






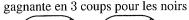
perdante en 2 coups pour les blancs

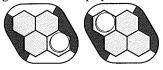




gagnante en 3 coups pour les blancs







Il n'y a pas de position perdante en 4 coups.

une position où il y a déjà un chemin blanc entre les deux bords blancs et pour les noirs de recevoir une position où il y a déjà un chemin noir entre les deux bords noirs (d'après les règles, le jeu se serait terminé avant).



On peut construire de proche en proche la figure 1 de la page 15 en partant des positions gagnées. On voit que la position ci-contre est gagnante en trois coups pour les blancs. En étudiant les positions gagnantes et perdantes pour les noirs, on se rend compte que les coups A et D sont

gagnants pour les blancs, tandis que les coups B et C ne le sont pas. La stratégie gagnante pour les blancs consistera donc à jouer en A ou en D.

On voit que toutes les positions qui ne sont pas impossibles apparaissent dans la figure 1. Autrement dit, toute position qui n'est pas impossible pour les blancs est soit gagnante pour les blancs soit perdante pour les blancs. Il en est de même pour les noirs. En fait, c'est vrai pour toutes les tailles de plateaux, et plus généralement pour tous les jeux ayant les propriétés citées au début de cette partie.

On va le démontrer par *récurrence*. Plus précisément, on va montrer que toute position possible pour un certain joueur où il reste n cases vides est soit gagnante en au plus n coups, soit perdante en au plus n coups pour ce joueur (on peut voir, en regardant la définition, qu'une position ne peut pas être à la fois gagnante et perdante pour un joueur).

Tout d'abord, une position possible pour un certain joueur dont aucune case n'est vide est forcément perdue. En effet, d'après ce qu'on a vu plus haut (voir la partie *il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex*, page 9), il y a soit un chemin blanc entre les bords blancs, soit un chemin noir entre les bords noirs. Mais il est aisé de voir qu'un joueur ne peut par recevoir une position qui a un chemin de sa couleur déjà tracé, car dans ce cas, d'après la règle du jeu, la partie se serait terminée avant.

Supposons maintenant que la propriété que l'on veut démontrer soit vraie pour n. On va montrer qu'elle est vraie pour n+1. Soit donc une position P dont le plateau a n+1 cases vides et qui n'est pas une position impossible pour un certain joueur J. De deux choses l'une : soit ce joueur a perdu et par définition la position est « perdante en 0 coup pour lui ». Sinon, le joueur J a un certain nombre de choix de positions qu'il peut donner à son adversaire A.

Par hypothèse de récurrence, chacune de ces positions est soit perdante en au plus n coups pour A, soit gagnante en au plus n coups pour A. Si au moins l'une de ces positions est perdante pour A (en au plus n coups), alors la position P est gagnante en au plus n+1 coups pour A. Sinon, toutes les positions que A peut donner à A sont gagnantes pour A (en au plus A coups) et donc, A est perdante en au plus A coups pour A.

Cela permet de conclure la récurrence : on a montré que toute position avec n=0 case vide restante était soit gagnante soit perdante en n=0 coup, puis, comme c'est vrai pour n=0, c'est aussi vrai pour n+1=1 d'après ce qu'on vient de voir, puis, comme c'est vrai pour n=1, c'est aussi vrai pour n+1=2 et ainsi de suite. C'est bien vrai tout le temps.

Pour résumer, un joueur a une stratégie gagnante à partir d'une certaine position si cette position est soit gagnante pour lui, soit perdante pour son adversaire. Si une position est gagnante pour un joueur, il peut choisir de donner une position perdante à son adversaire

(un tel coup est appelé *coup gagnant*), et ensuite, son adversaire est obligé de lui donner une position gagnante. Ainsi, il peut continuer avec la même stratégie jusqu'à gagner.

En règle générale, bien entendu, on ne peut pas espérer calculer complètement un tableau du type de la figure 1, page 15, qui serait beaucoup trop grand (par exemple sur un plateau de Hex de taille 14, ou, pour parler d'un autre jeu, aux Échecs). Ceci dit, beaucoup de programmes informatiques ainsi que les bons joueurs de ce type de jeu (Hex ou Échecs par exemple) partent de cette idée de base pour analyser une position. Bien qu'ils n'aient pas la capacité d'analyser la partie jusqu'au bout comme dans le cas du plateau de taille 2 (ou un peu plus grand pour un ordinateur), ils peuvent analyser un certain nombre de coups (raisonnements du type « si je fais ça, mon adversaire va faire ça et alors je ferai ça... ») et ainsi se faire une idée plus fine de l'intérêt tactique d'un coup.

Tactique et stratégie - niveau 2

Relier un bord. Pour qu'un pion posé à distance 1 du bord puisse être connecté à ce bord quels que soient les coups de l'adversaire il suffit qu'aucune des deux cases qui le relie au bord ne soit déjà occupée par un pion adverse.



Si les noirs jouent en A, on relie le pion en jouant B et vice versa.

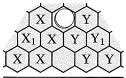
Pour un pion posé à distance 2 du bord, il existe deux dispositions classiques permettant de le relier au bord de façon certaine.



Configuration en trapèze. Le pion peut être relié au bord de façon certaine si les huit cases marquées ci-contre sont vides quand le pion blanc vient d'être posé.

Si les noirs jouent ailleurs que sur l'une des cases notées X, alors les blancs relient le bord en jouant en X_1 qui est à distance 1 du bord façon certaine. Et si les noirs jouent ailleurs que sur l'une des cases

et peut être relié de façon certaine. Et si les noirs jouent ailleurs que sur l'une des cases notées Y, les blancs jouent en Y_1 , relié au bord à distance 1 et au pion blanc par un maillon.



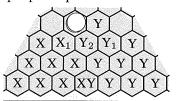
Configuration en arche. Le pion peut être relié au bord de façon certaine si les dix cases marquées ci-contre sont vides.

Encore une fois, si les noirs ne jouent pas sur l'une des cases notées X, alors les blancs relient le bord en jouant en X_1 et si les noirs ne jouent pas sur l'une des cases notées Y, les blancs relient

le bord par Y_1 . Notez que la case située juste en face du pion blanc sur le bord n'est pas utile dans cette configuration et pourrait donc tout à fait être occupée par un pion noir.

À distance 3, la configuration minimale pour pouvoir relier son pion au bord de façon certaine est dessinée cicontre.

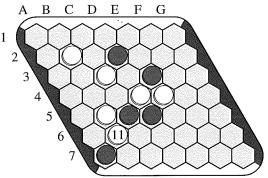
Si les noirs ne jouent pas sur une case X, les blancs relient au bord par X_1 à distance 2 du bord en trapèze. Si les noirs ne jouent pas sur une case Y, les blancs relient au bord par Y_1 de la même façon. Le seul coup éventuel-



lement ennuyeux pour les blancs est donc la case d'intersection XY. Mais si les noirs jouent

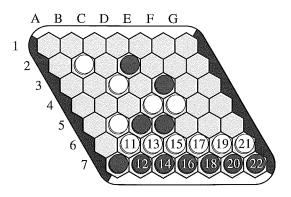
sur cette case, les blancs relient au bord par Y_2 grâce à la configuration en arche à distance 2.

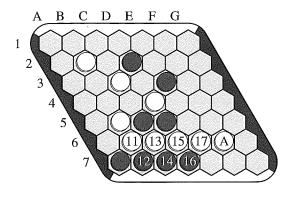
Échelles. Dans la position suivante, les blancs viennent de jouer 11.b6 :



(notation des coups: voir page 28) Les blancs sont sur le point de relier le bord du bas mais c'est aux noirs de jouer. La seule défense possible pour les noirs est de jouer 12.b7. Il s'ensuit les coups 13.c6; 14.c7; 15.d6; 16.d7; 17.e6; 18.e7. À chaque coup, les blancs tentent de relier le bord et sont à chaque fois contrés naturellement par les noirs.

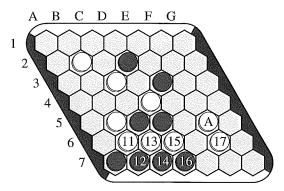
Une telle séquence de jeu se nomme une échelle. Une échelle se déroule quasiment toujours dans une direction favorable au défenseur. Dans l'exemple ci-dessus, si l'échelle est prolongée jusqu'au bout par 19.f6; 20.f7;21.g6;22.g7, alors les noirs gagnent. C'est donc le plus souvent à l'attaquant de prendre l'initiative de rompre l'échelle.





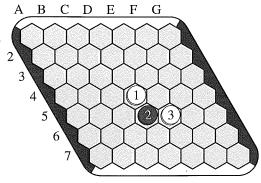
Points d'appui. Une technique pour rompre une échelle est d'avoir au préalable placé un *point d'appui*. Reprenons le diagramme précédent mais où cette fois les blancs ont un pion A en f 6.

Dans cette configuration les blancs gagnent car après 12.b7;13.c6; 14.c7;15.d6;16.d7 puis 17. e6, ils possèdent deux cases pour relier le bord du bas : e7 et f7.



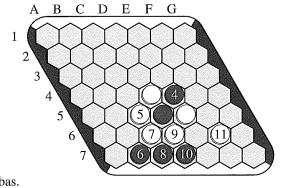
Un point d'appui peut également se trouver à distance 2 du bord. Par exemple, si le point d'appui A se trouve en £5, les noirs jouent 12.b7 et les blancs gagnent par 13.c6; 14.c7; 15.d6; 16.d7; 17.f6 ce dernier pion £6 est alors relié au bord à distance 1 et le point d'appui est relié à l'échelle par un maillon.

Le coup du pêcheur. Voici un piège classique dans lequel tombent souvent les joueurs débutants. Prenons par exemple, le début de partie suivant sur un plateau de taille 7 :



1.d4;2.d5;3.e5

Le pion blanc e5 est relié au bord par un trapèze. Pour empêcher les blancs de relier leur pion central au bord du bas, les noirs ont envie de jouer 4.e4. C'est une erreur car les blancs jouent alors 5.c5 ce qui force 6.b7 pour empêcher la jonction avec le bord du bas, possible à la fois en b6 et c6. S'ensuit alors une échelle qui relie le bord grâce au point d'appui e5:7.c6;8.c7;9.d6;10.d7;11.f6 et les blancs relient le bord du bas.



Nous allons voir dans la suite quel coup permet de contrer le coup du pêcheur. Saurezvous le trouver? Se ménager plusieurs chemins. Nous l'avons déjà vu, au jeu de Hex, il faut toujours penser à se construire plusieurs chemins pour arriver au but. Les maillons en sont l'exemple le plus simple : les deux pions peuvent être reliés par deux cases différentes. Le même principe est vrai à plus grande échelle. Les joueurs débutants ont souvent tendance à se focaliser sur le chemin qui leur semble le plus robuste à un moment de la partie. Mis à part dans les fins de partie, il est très rare qu'un chemin puisse être assuré et une telle stratégie est souvent vouée à l'échec.

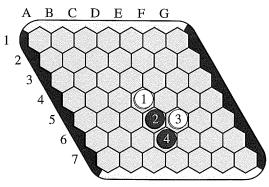
À chaque coup, la bonne question à se poser n'est pas « par où vais-je passer ? » mais plutôt « quel est le coup qui me crée le plus grand réseau possible de chemins de façon à ce que mon adversaire ait le moins de chances de tous les contrer ? ».

Le coup du pêcheur en est un exemple. Lorsque les blancs jouent 3. e5 dans l'exemple précédent, ce n'est ni dans l'objectif précis de passer par e4, ni dans celui de faire un point d'appui en passant par c5. C'est pour avoir les deux possibilités afin d'avoir une réponse adaptée en fonction du jeu de l'adversaire.

Jouer sur les points sensibles de l'adversaire. Les cases sensibles de l'adversaire sont celles qui sont à l'intersection de plusieurs chemins possibles. Lors d'une phase de jeu défensive, ce sont ces cases qu'il faut repérer en priorité.

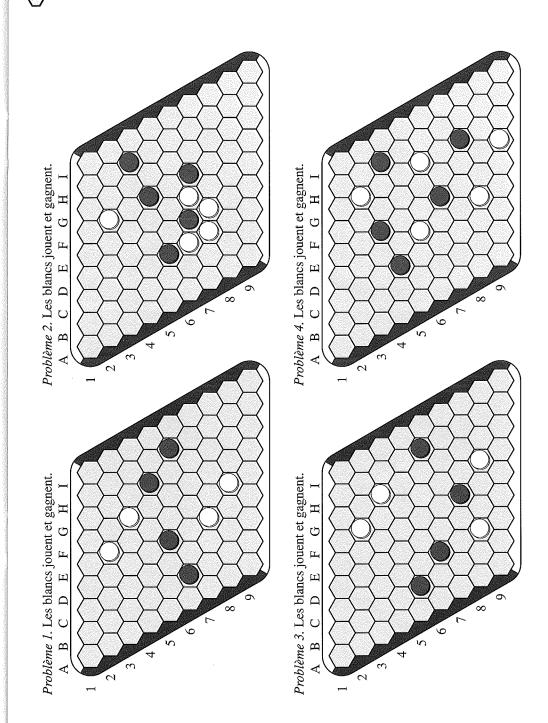
Revenons au coup du pêcheur. Dans la configuration après 1.d4; 2.d5; 3.e5, le bon coup pour les noirs est 4.d6!

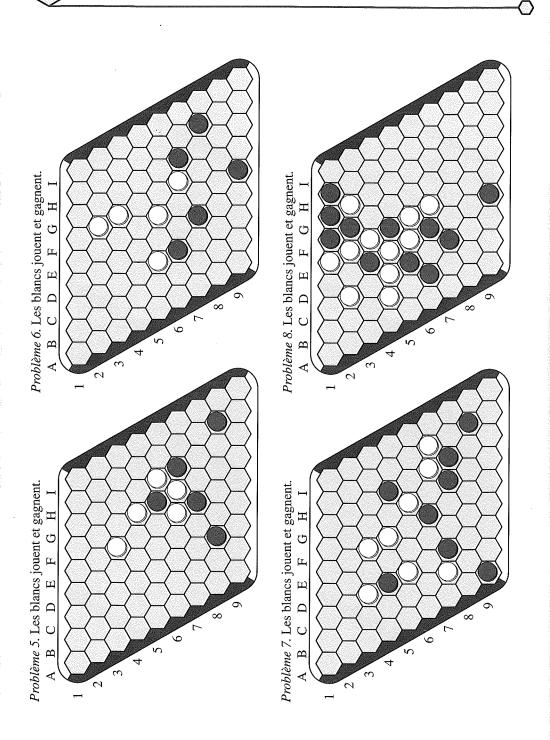
Ce coup a un double avantage: il se trouve à l'intérieur du trapèze qui relie e5 au bord et il empêche la progression d'une échelle qui passerait par c5. Maintenant, si les blancs jouent 5.e4, les noirs bloquent définitivement le passage par 6.e6. Si les blancs choisissent de relier immédiatement e5 par le trapèze en jouant 5.f6, alors les noirs peuvent désormais jouer 6.e4 sans craindre le passage des blancs par c3.

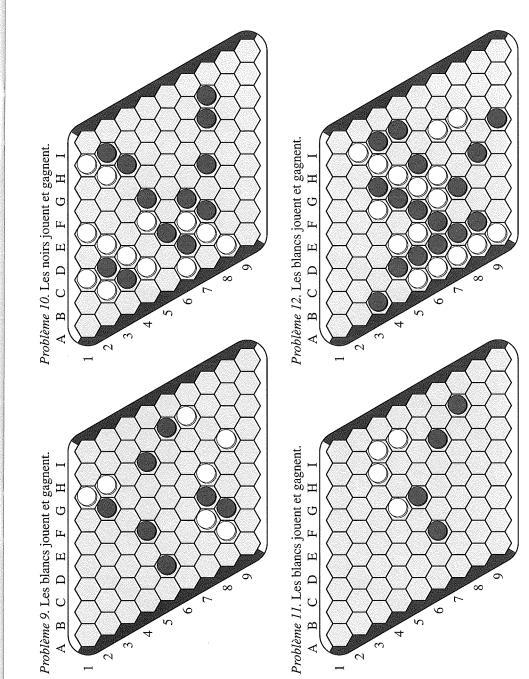


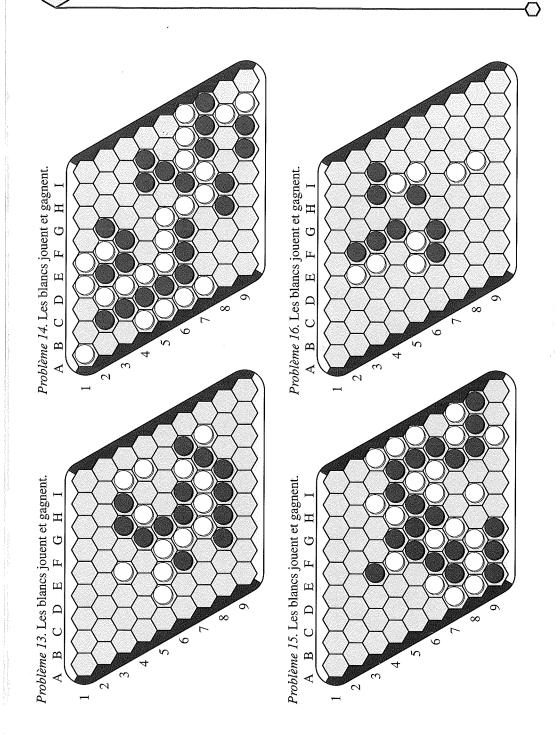
Problèmes

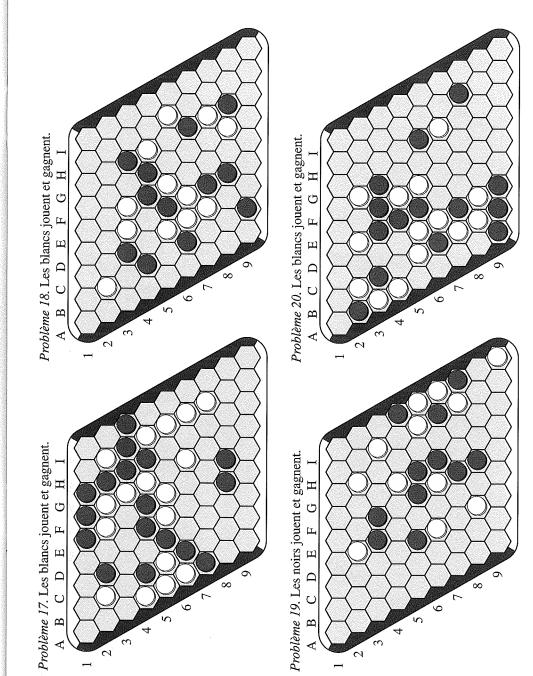
Tous les problèmes présents dans cette partie consistent à trouver le meilleur coup pour les blancs ou pour les noirs et à décrire la suite de meilleurs coups. Dans les solutions, seules les variantes principales sont décrites (les coups d'attente ou les mauvais coups ne sont pas indiqués, sauf s'ils présentent un intérêt particulier). Les quatre premiers problèmes sont des applications de la partie *tactique 1*. Les huit suivants sont des applications de la partie *tactique 2* et les seize autres sont des problèmes plus libres. Dans la mesure du possible, ils sont classés par difficulté progressive.

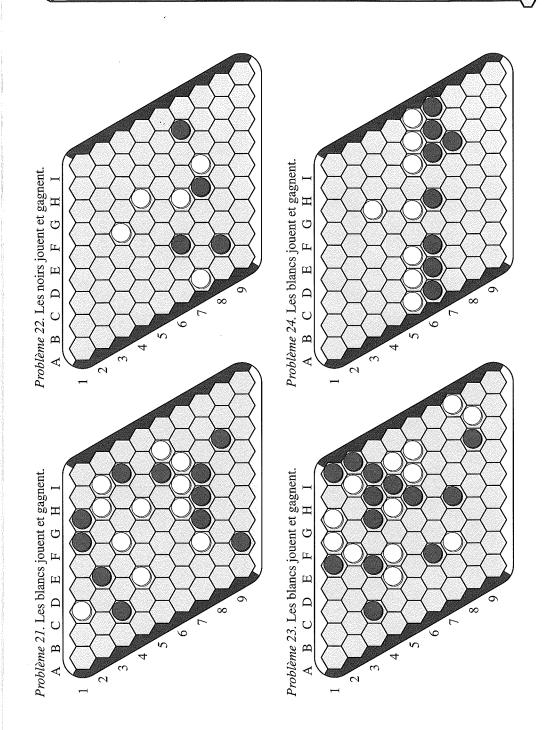


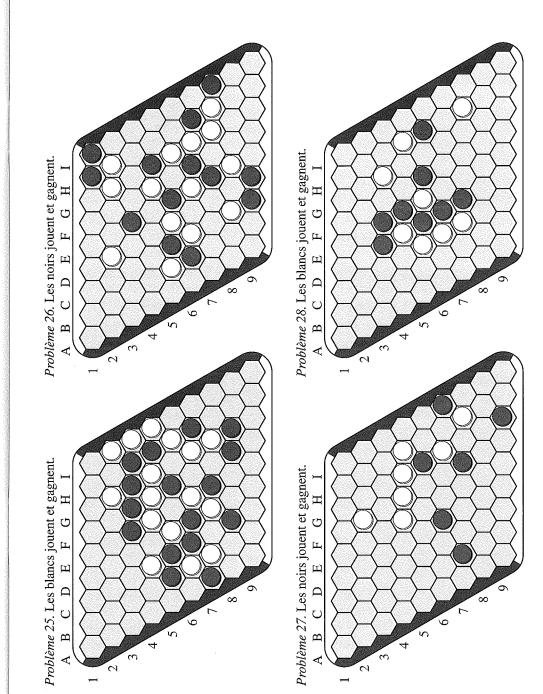






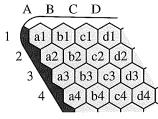






Solution des problèmes

Notation algébrique. On note habituellement les cases du jeu de Hex par leurs coordonnées. Un coup est alors noté par son numéro dans la partie suivi de la case dans laquelle le pion est posé. Par exemple un premier coup peut être 1.02. Tous les coups joués par les blancs portent des numéros impairs et les coups joués par les noirs portent des numéros pairs.



Solution du problème 1. 9. e5. Les blancs ont alors une chaine de maillons reliant leurs deux bords (voir page 5).

Solution du problème 2. 11. e4. Le groupe c6-c7-d7-e6 est alors relié à e4 soit par d5 soit par e5 (puis au bord du haut par le maillon e4-f2) et au bord du bas soit par b8 soit par d8.

Solution du problème 3. 9. £5. Le pion posé est relié au bord du haut par une chaîne de maillons. Il sera relié au bord du bas au coup suivant soit par 11. d6 (si les blancs jouent le dixième coup à droite de £5) soit par 11. g6 (si les blancs jouent à gauche de £5).

Solution du problème 4. 11. f4. Par ce coup, les deux pions d5 et g5 sont reliés au bord du haut. Quel que soit le coup suivant des noirs, l'un d'entre eux pourra être relié au bord du bas, le premier par 13. c7 ou le second par 13. f7.

Solution du problème 5. 11. f7. Le pion f7 est alors relié au bord du bas par un trapèze (voir page 17) et à f4 soit par e5 soit par g4. Puis f4 est relié à e3 par un maillon et e3 est relié au bord du haut par un trapèze.

Solution du problème 6. 11. £7. Ce pion est alors relié au bord du bas par une arche (voir page 17).



si les blancs veulent empêcher les noirs de relier, ils doivent jouer sur l'une des deux cases rouges. Solution du problème 7. 17.g8;18.h7;19.b8 et l'échelle a un point d'appui (voir page 18). Si les blancs jouent 17.b8 et ne jouent jamais en g8, alors les noirs, après 18.b9, ont une échelle gagnante.

Solution du problème 8. 23. e7. Ce pion est alors relié au bord du bas par une arche (voir page 17).

Solution du problème 9. 15.f4. Ce pion est relié en haut par un maillon et en bas par un pseudo-trapèze. Autrement dit, on peut atteindre de façon sûre l'un des pions c7 ou e7 qui sont déjà reliés de façon certaine en bas. Notez que, comme les noirs menacent 16.f3 et 16.e5, le seul autre candidat pour les blancs est 15.e4 qui perd après 16.f3;17.e3;18.e2 (échelle gagnante pour les noirs).

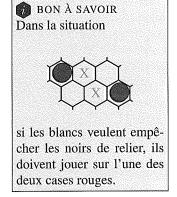
Solution du problème 10. 26. a9. C'est le seul coup possible puisque le pion blanc a8

est relié au bord du haut de façon certaine. Il s'ensuit une échelle, les coups des blancs sont à chaque fois forcés car les pions noirs c7, e7, g7 et h7 sont reliés au bord droit de façon certaine. 27.b8;28.b9;29.c8;30.c9;31.d8;32.d9;33.e8;34.e9;35.f8;36.f9;37.g8;38.g9;39.h8;40.h9, qui gagne au coup suivant par i8 ou i9.

Solution du problème 11. 9. £6. Le pion posé est alors relié au bord du bas par la configuration de liaison à distance 3 (voir page 17). Il est également relié au bord du haut en passant soit par £5 soit par £5 (relié à £3 par un maillon) selon le jeu des noirs.

Solution du problème 12. 33.e7. Menace 35.d8 et 35.h8 qui ne peuvent pas être parés en même temps. Les blancs peuvent intercaler 33.h8; 34.f6 avant.

Solution du problème 13. 27.b8. Menace 29.c7 et 29.a7 qui ne peuvent pas être parés en même temps. Notez que les noirs menaçant 28.b7 et 28.a9, il n'y a de toute manière pas d'autre possibilité pour les blancs.



Solution du problème 14. 45.f8. Menace 47.g8 et 47.e9 qui ne peuvent pas être parés en même temps.

Solution du problème 15. 41.c4. Le groupe c4-d4 est alors relié au bord du bas par des maillons. Selon le jeu des noirs, il est également relié au bord du haut en jouant soit 43.e3 soit 43.b3 qui sont reliés par des trapèzes disjoints.

Solution du problème 16. 17.e5. Menace 19.f4 et 19.e6 qui ne peuvent pas être parés en même temps (si 18.f6 alors 19.e6; 20.e7; 21.d7 gagne). Remarquons que sur 17.f4, les noirs gagnent par 18.e5; 19.f3; 20.g1 qui forme une échelle gagnante pour les noirs.

Solution du problème 17. 35.d2. Le pion joué étant relié au bord du bas, il force 36.d1, suivit par 37.c4 qui relie le bord du haut via les deux maillons d2-c4 et a4-b2. À noter que 35.c4, gagne aussi avec une inversion de coups.

Solution du problème 18. 25.e7. Ce pion est relié au bord du bas via £8 et comme par ailleurs le groupe c5-c6-c7-d6-e5 est relié au bord du haut, les noirs n'ont d'autre réponse que 26.e6. S'ensuit 27.£5, qui est relié au bord du bas soit par £6 soit par £6.

Solution du problème 19. 24. h4. Le pion en c5 est relié en trapèze à gauche. Si les blancs jouent 25. d5 alors 26. e4; 27. c4; 28. c3 gagne (ou 26. c7; 27. a8; 28. b7 grâce à une échelle à point d'appui). Si les blancs jouent 25. c4, alors 26. c3; 27. e4; 28. d5; 29. a6; 30. b5 qui donne une échelle à point d'appui gagnante pour les noirs.

Solution du problème 20. 29. d8. Ce coup entraîne automatiquement 30. d9; 31. f8; 32. e8; 33. f6, les blancs menaçant alors 35. e7 et 35. d6 qui ne peuvent pas être parés en même temps.

Solution du problème 21. 23. f8. Les réponses possibles des noirs sont 24. g7, 24. e9 et 24. f9. Dans le premier cas, 25. c8 forme une échelle avec point d'appui gagnante. Les autres variantes sont 24. e9; 25. f9; 26. g7; 27. c8 et 24. f9; 25. e9; 26. g7; 27. c8 qui forment aussi des échelles gagnantes. Notons que c7 peut être relié en haut par d6 ou b6, ce qui assure la victoire.

Solution du problème 22. 10. e8. Il s'agit ici du seul coup possible pour empêcher une victoire des blancs par le coup du pêcheur (voir page 19). Le groupe e7-e8 est alors relié au bord droit soit par £6 soit par £8 en utilisant h6. Du côté gauche, les noirs menacent 12.09 et 12.d7;13.c7;14.d6;15.b7;16.b5. On ne peut pas parer les deux menaces en même temps.

Solution du problème 23. 27.b7. Le groupe c4-d4 est facilement relié en haut : si les noirs jouent 28.e3 alors 29.c3; 30.d2; 31.c2 relie. Le groupe b7-c7 est facile à relier en bas (pour l'instant). Si les noirs jouent 28.b5, 28.b6 ou 28.c5, alors, les blancs jouent 29.e5. Si les noirs répondent par 30.e6 ou 30.d7, alors 31.d6 gagne. Si les noirs jouent 30.d6, alors 31.e6; 32.d7; 33.f6. Ensuite, sur 34.h6 ou 34.i6, 35.g7 gagne.

Solution du problème 24. 17.d6. Le seul coup à parer les menaces 19.c8, 19.d7 et 19.e7 est 18.d7. Ensuite, 19.e8 menaçant 21.f6 oblige les noirs à jouer 20.f6, 20.e7 ou 20.f7. Ensuite, 21.c7; 22.b9; 23.c8 forme une échelle avec point d'appui gagnante pour les blancs. Notons qu'il y a une solution symétrique en jouant 17.f6. Les pions blancs des groupes en haut du plateau sont faciles à relier au bord du haut quoi que jouent les noirs.

Solution du problème 25. 33.d8. Comme i 2 est clairement relié au bord du haut, cela force 34.f6; 35.e5; 36.g5; 37.d4 qui menace 39.b3 (trapèze) et 39.d2 (maillons). Les noirs ont deux réponses coupant les deux possibilités 38.d1; 39.d2; 40.e1 et 38.c3; 39.d3; 40.e1; 41.e2 puis dans les deux cas une échelle à point d'appui gagnante pour les blancs.

Solution du problème 26. 28.f5. Le groupe g4-e5-f5-f6-e7 est alors connecté au bord droit grâce au point d'appui h6. En jouant f5 les noirs créent deux menaces de connexion vers la gauche, l'une en e4 l'autre en c7. Si 29.e4, alors 30.c7;31.a8; 32.b7, qui relie grâce au point d'appui b6. Et si 29.c7, alors 30.e4;31.d4;32.d3; 33.c4;34.c3, qui relie le bord gauche par un trapèze.

Solution du problème 27. 14.97. Puis les noirs gagnent en combinant les idées suivantes: si les blancs jouent 15.e6 alors 16.d8; si les blancs jouent 15.e7 alors 16.f5 (menaçant 18.h5 et 18.f6); si les blancs jouent 15.h6 alors 16.h8 et enfin, si les blancs jouent 15.i8 alors 16.h6.

Solution du problème 28. 17. g5. Si les noirs jouent 18. g6, alors 19. f6. Ensuite, on a soit 20. e8; 21. f7; 22. f9; 23. g8; 24. g9; 25. i8 soit 20. f7; 21. e7; 22. d9; 23. e8 puis une échelle à point d'appui gagnante pour les blancs. Si les noirs jouent 18. f9, alors 19. f7 menace 21. e8 et 21. g8 que les blancs ne peuvent pas parer en même temps.

🕡 QUELQUES RÉFÉRENCES, POUR ALLER PLUS LOIN

- HexWiki (http://www.hexwiki.org): une référence, en anglais, de sites, ouvrages, et autres informations liées au jeu de Hex.
- BoardSpace (http://www.boardspace.net): permet de jouer en ligne contre une intelligence artificielle (faible) ou contre d'autres joueurs à plusieurs jeux, dont le jeu de Hex (il possède une version française).
- Little Golem (http://www.littlegolem.net): ce site, en anglais, permet de jouer des parties de nombreux jeux classiques, dont le jeu de Hex. La spécificité de ce site est d'organiser des parties proches de parties par correspondance (une partie peu durer plusieurs jours voire une semaine; chaque joueur réfléchit autant qu'il le désire pendant un intervalle de temps assez long).
- Ludoteka (http://www.ludoteka.com): permet de jouer en ligne au jeu de Hex et à d'autres jeux.
- igGameCenter (http://www.iggamecenter.com): permet de jouer en ligne au jeu de Hex et à d'autres jeux.
- Le petit archimède (http://www.lepetitarchimede.fr): cette ancienne revue de jeux mathématiques est en cours de numérisation. Les numéros de 66 à 76 contenaient une rubrique consacrée au jeu de Hex.
- MicMaths (http://www.micmaths.com): site consacré aux jeux mathématiques et au Hex, entre autres.

Le Comité International des Jeux Mathématiques, éditeur de cette version du jeu de Hex, est une association créée en 1993 par des professeurs de mathématiques désireux de proposer une autre réflexion sur leur discipline, à travers une approche plus ludique que scolaire.

Le CIJM fédère plus de trente compétitions intéressant ainsi plusieurs millions de personnes tant en France qu'à l'étranger, dont le *Championnat international des jeux mathématiques et logiques* (http://



www.ffjm.org). Toutes unissent leurs énergies pour proposer des activités mathématiques vivantes et créatives.

Le CIJM propose aussi tous les ans, fin mai, à Paris, un Salon de la culture et des jeux mathématiques, ouvert à tous et gratuit. Il est aussi présent lors de nombreux événements touchant aussi bien le grand public que le monde enseignant et propose des animations et tournois autour de nombreux jeux, en particulier le jeu de Hex.



Enfin, le CIJM édite plusieurs ouvrages et expositions, ainsi que des jeux (notre précédente création se nomme Mathisto). Plus de renseignements sur