

Version v2 =version pour le CIJM

Surligné en bleu – à faire par Lisa

Surligné en rouge : à faire par Nicolas

Une Hex-périence unique à la croisée des
mathématiques et de l'histoire !

Préface d'Hugo Duminil, médaille Fields 2022

Pourquoi cette brochure ?

La brochure que vous tenez entre vos mains est la deuxième édition d'une première brochure qui accompagne la boîte de jeu de Hex éditée et commercialisée par le CIJM (Comité International des Jeux Mathématiques) depuis 19XX. Depuis, le plateau de jeu a fait peau neuve et la brochure a été considérablement augmentée, avec de nouvelles sections en lien avec l'histoire du jeu de Hex, son intérêt pour les mathématiques et l'informatique, ainsi que de nouvelles approches stratégiques détaillées pas à pas. L'organisation de cette nouvelle édition devrait permettre à chacun·e d'y trouver son compte !

Une première partie est consacrée à l'histoire pleine de rebonds du jeu de Hex, des premiers défis publiés dans un journal danois en 1943 aux plateaux commercialisés dans les années 1950. Vient ensuite une partie montrant l'intérêt constant qu'ont eu les mathématiciens pour le jeu de Hex, et comment sa programmation informatique – à l'instar d'autres jeux de plateau – relève de questions vives dans le domaine de l'intelligence artificielle. Enfin, les mathématiques sous-jacentes au jeu de Hex sont présentées de manière progressive : dans un premier temps en donnant quelques éléments de la théorie des jeux combinatoires (dont le jeu de Hex fait partie) puis en exposant les premières bases tactiques pour construire au mieux une stratégie gagnante. Des défis à relever clôturent cette brochure, avec une liste de références accessibles pour celles et ceux qui voudraient approfondir le sujet.

Les contributeurs de cette brochure sont :

- Lisa Rougetet, enseignant-chercheur en histoire des mathématiques à l'Université de Bretagne Occidentale de Brest, rattachée au Centre François Viète. Coordinatrice de la présente brochure, elle s'est focalisée sur les aspects historiques du jeu de Hex, son invention, son lien avec les récréations mathématiques, ses intérêts pour les mathématiques et l'intelligence artificielle.

-Le CIJM dont Nicolas : bla bla

→ Nicolas re-rédige cette section en montrant les apports historiques par Lisa + réflexion Plaisir Maths sur l'enseignement

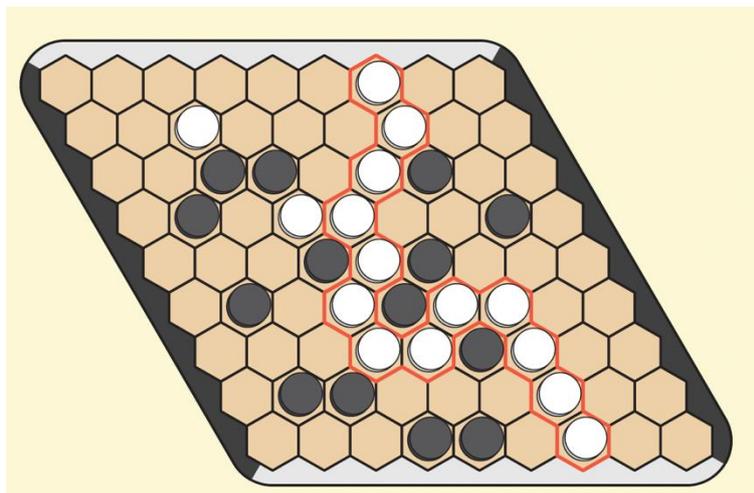
Sommaire	
REGLES DU JEU	4
UNE HISTOIRE DU JEU DE HEX	5
L'INTERET DU JEU DE HEX POUR LES MATHEMATIQUES ET L'INFORMATIQUE	13
JEU DE HEX ET MATHEMATIQUES	17
BASES TACTIQUES ET STRATEGIQUES	29
CONCLUSION	36
QUELQUES DEFIS	36
REFERENCES POUR ALLER PLUS LOIN	36

Règles du jeu

Matériel. Le jeu de Hex se joue à deux avec des pions noirs et des pions blancs sur un tablier en forme de losange, pavé par des hexagones. Deux bords opposés du tablier sont blancs et les deux autres sont noirs. **Le jeu qu'accompagne ce livret comprend un plateau dépliant présentant 3 tabliers de tailles 9 x 9, 11 x 11 et 14 x 14**, mais historiquement, le premier tablier de jeu utilisé comportait 11 x 11 cases (voir plus loin la section **Une histoire du jeu de Hex**).

***Remarque :** le terme « tablier » est équivalent à « plateau », ce dernier étant une traduction littérale de l'anglais « board ». Les spécialistes du jeu préfèrent l'emploi du mot « tablier » pour désigner la surface plane sur laquelle se jouent des parties de jeux de stratégies comme les Échecs, les Dames, le Go, etc. et plus généralement de jeux se déroulant sur une surface normée.*

Règles. L'un des deux joueurs a les blancs. L'autre a les noirs. Le joueur qui a les pions blancs commence. Il place un de ses pions sur une case de son choix. Ensuite, chaque joueur place à son tour un de ses pions sur une case libre de son choix. Le premier joueur à avoir relié les deux bords de sa couleur avec ses pions par une ligne continue a gagné.



Dans la partie ci-dessus, les blancs ont gagné car un chemin continu de pions blancs – encadré en rouge – relie les deux bords blancs.

Vous connaissez les règles. . . Vous pouvez jouer !

POUR LES JOUEURS EXPÉRIMENTÉS : L'INVERSION (ou *Swap rule*)

Lorsque deux joueurs de niveau élevé jouent entre eux, l'expérience montre que celui qui commence a un petit avantage. On peut, à ce niveau, ajouter la règle suivante : lors de leur

premier coup, les noirs, au lieu de jouer sur une case vide, ont le droit « d'inverser », c'est-à-dire de remplacer le premier pion blanc par leur propre pion. Ainsi, les blancs sont forcés de trouver un compromis entre un coup très faible et un coup trop fort au début.

Une histoire du jeu de Hex

Le jeu de Hex est un jeu de stratégie pouvant être qualifié de récréation mathématique (voir encart **Sur les récréations mathématiques**) relativement récent dans l'histoire des jeux de plateau (voir encart **Sur l'histoire des jeux de plateau**), et qui se singularise sur de nombreux aspects. Tout d'abord, par la forme des cases qui composent son tablier : hexagonale. La consultation de la base de données Ludii¹, recensant quelques 1400 jeux de tablier, montre qu'environ 7% d'entre eux présentent des cases hexagonales, mais parmi ceux-là beaucoup ne sont pas des jeux traditionnels (ils ont été inventés à des fins d'analyses mathématique ou informatique et ne sont pas communément pratiqués, ni même connus du grand public). Ensuite, il semblerait que parmi les jeux dits « de connexion » – qui n'est pas un concept nouveau parmi les jeux de pions – le jeu de Hex soit le premier de ce type à relier les deux bords d'un tablier par une chaîne continue de pions identiques, sans l'intervention d'un instrument de hasard (dés, osselets, tirage aléatoire de cartes, etc.). Enfin, malgré la simplicité de ses règles – vous avez pu le constater à la lecture de la première page ! – le jeu de Hex se révèle tout aussi intéressant et profond que le jeu d'Échecs. En tout cas, c'est ce qu'avance son inventeur, le Danois Piet Hein² (1905-1996), et l'histoire prouve qu'il n'avait pas tort !

Sur les récréations mathématiques

Même si le terme « récréations mathématiques » en tant que tel n'apparaît dans la littérature en France qu'à partir du début du XVIIe siècle, ces dernières existent depuis plus longtemps, au moins depuis l'Antiquité et se sont sûrement également transmises par voie orale. Les récréations mathématiques peuvent revêtir des formes diverses et variées : énoncés de problèmes écrits (par exemple le problème du chou, de la chèvre et du loup), casse-têtes mécaniques (la Tour d'Hanoï, le Rubik's Cube) ou encore jeux de stratégie, comme le

¹ <https://ludii.games/library.php>, consulté en mai 2025.

² Piet Hein est aussi l'inventeur du casse-tête mécanique géométrique connu sous le nom de *Cube Soma*, commercialisé au Danemark et en Angleterre en 1934. Ce dernier est composé de 7 pièces différentes, chacune formée d'un certain nombre de cubes unitaires agencés de façon irrégulière (en tricube et tétracubes). Le but est d'assembler ces pièces de manière à former un cube de 3 unités de côté. Il y a 240 solutions distinctes pour reconstituer le cube, elles ont été étudiées minutieusement par les mathématiciens Martin Gardner (1914-2010) et John Conway (1937-2020).

Morpion, le Puissance 4 ou le jeu de Hex. Mais quelle que soit leur forme, les récréations mathématiques peuvent se caractériser par quatre aspects : aspect populaire (elles doivent être compréhensibles par n'importe qui), aspect amusant/ludique/divertissant, aspect pédagogique (elles peuvent servir à des fins d'enseignement) et aspect historique, dans la mesure où certains problèmes ont traversé les siècles et sont encore actuellement connus sous leur forme d'origine. Le jeu de Hex remplit tous ces critères.

Sur l'histoire des jeux de plateau (Entretien avec Walter Crist, archéologue)

Question : depuis quand les humains jouent-ils à des jeux de plateau ? À quand remontent les premiers tabliers ? Où ont-ils été retrouvés ?

Walter : Les humains jouent à des jeux de plateau depuis 5800 ans au moins. Le jeu le plus ancien a été découvert dans la tombe d'une femme en Égypte. Avant cela, on utilisait probablement des bouts de bois et des cailloux pour jouer sur des plateaux éphémères dessinés sur le sol. Ce qui explique que ces jeux restent inconnus des archéologues. Il est possible que les hommes aient joué de cette façon pendant des milliers d'années mais nous ne pourrions jamais savoir avec certitude quand ils ont commencé. Cependant, à partir du moment où des objets ont été fabriqués pour jouer à des jeux de plateau, environ 3800 ans avant notre ère, nous pouvons retracer leur histoire de cette époque à nos jours.

Question : quelles étaient les règles de ces jeux de plateau anciens ? Variaient-elles selon les zones géographiques ?

Walter : Dans beaucoup de cas, il est difficile de savoir quelles étaient les règles de ces jeux anciens, car elles étaient rarement écrites. De ce que nous savons, il semble que les jeux les plus populaires en Égypte, en Mésopotamie et dans l'ancien Mexique étaient des « jeux de parcours »³ : l'avancement des pièces de jeu résulte d'un lancement de dés et le but principal est de déplacer les pièces d'un point de départ jusqu'à une arrivée. Les « jeux de guerre » (*Wargames*) ou « jeux de capture », dont l'objectif est de capturer les pièces de l'adversaire, sont devenus populaires dans la Grèce antique et à Rome. Le plus ancien des « jeux de territoire » est apparu en Chine environ 500 ans avant J.-C. ; dans ce jeu, les joueurs doivent placer leurs pièces de manière à occuper des zones du plateau. Le plus célèbre de cette

³ Une classification des jeux – entreprise néanmoins difficile ! – peut s'opérer selon l'objectif principal qu'ils affichent : arrangement (Morpion), atteinte/parcours (jeu de l'Oie), blocage (Renard et poules), capture (Échecs), chemin/connexion (Hex), score/territoire (Go), etc.

catégorie de jeux est le Go japonais. Plus tard, le jeu de Nard inventé en Perse deviendra ensuite le Backgammon. Enfin, le Chaturanga, ancêtre des Échecs, a vu le jour dans le nord de l'Inde.

Question : existe-t-il d'autres jeux que le jeu de Hex pour lesquels le but est de connecter deux côtés d'un plateau par un chemin continu de pions ?

Walter : Les jeux traditionnels comme ceux cités précédemment ont traversé le monde grâce au bouche-à-oreille. Durant le XIXe siècle, une industrie s'est développée autour de l'invention et de la commercialisation des jeux. Dans ce contexte, on a commencé à explorer de nouvelles mécaniques de jeux qui n'avaient encore jamais été utilisées, de façon à créer des jeux inédits. C'est dans cet esprit que le jeu Hex a été conçu, en utilisant une mécanique de jeu simple, mais encore jamais utilisée, qui consiste à relier les deux côtés du plateau avec ses pions pour gagner.

- Naissance du jeu au Danemark (1942)

Lorsque le jeu de Hex est présenté pour la première fois en 1942 par Piet Hein (1905-1996), mathématicien, physicien, poète et designer danois, lors d'une conférence organisée par la Société de Mathématiques et de Sciences Naturelles de l'université de Copenhague⁴, ce dernier lui donne le nom *Polygon*. Durant cette conférence intitulée « Les mathématiques comme jeu – les mathématiques des jeux », Piet Hein développe également de manière plus générale ses propres critères qui définissent un bon jeu : équitable (chaque joueur a la même chance de gagner), fini (nombre limité de coups dans une partie), progressif (il ne peut y avoir deux positions identiques sur le tablier dans une même partie), clair (aucun mouvement ne renverse complètement la situation ou la stratégie d'un joueur), stratégique (offre des combinaisons de jeu variées) et décisif (ne se finit pas sur un nul). Tous ces qualificatifs pouvant bien sûr s'appliquer à *Polygon*⁵ !

Deux semaines après cette conférence, le samedi 26 décembre 1942, le jeu est introduit au grand public par le quotidien danois *Politiken* qui publie jusqu'au 1^{er} août 1943⁶ cinquante rubriques

⁴ Présidée par Aage Bohr (1922-2009), fils du prix Nobel de physique Niels Bohr (1885-1962), lui-même prix Nobel, alors étudiant à l'époque.

⁵ Piet Hein n'était pas certain que *Polygon* plairait à un large public. Il l'a donc d'abord testé au sein de son réseau social et professionnel : les étudiants de l'université de Copenhague et de l'Institut Polytechnique auraient été mis à contribution en testant le jeu au préalable.

⁶ Après cette date, le rubrique s'arrête brutalement, certainement dû au fait que Piet Hein et sa famille furent contraints de quitter le Danemark pour fuir l'occupation allemande et s'installer en Argentine.

(quotidiennes jusqu'au 11 janvier 1943) rédigées par Piet Hein sur le sujet et organise deux soirées thématiques pour permettre aux personnes de se rencontrer et de jouer ensemble. Chaque rubrique présente la solution commentée de la rubrique précédente, un nouveau problème et un tablier vierge pour jouer. Il semblerait que le jeu eut du succès, car près de 50 000 supports de jeu furent vendus à partir de janvier 1943 (le pays comptait alors 4 millions de personnes). À cette époque, il ne s'agissait pas encore d'un tablier « solide » (en bois ou en plastique) sur lequel on jouait avec des pierres de couleur, mais d'un tablier dessiné sur papier prévu pour jouer avec un crayon (un set de jeu comprenait 50 tabliers dessinés, soit la possibilité de jouer 50 parties, à moins de jouer au crayon gris et de gommer les parties !). La Figure 2 montre un tablier vierge de taille 11 x 11, dessiné par Piet Hein, les « ronds » (blancs) jouent contre les « croix » (noirs). Les joueurs dessinaient alors tour-à-tour leur symbole dans la case de leur choix.



Figure 1 : Dessus du set de 50 tabliers dessinés pour jouer à *Polygon*. Sa taille permettait de le glisser dans une poche ou un sac, et était vendu au prix de 50 øre (ou 0,5 kroner), soit environ 1,50€ aujourd'hui.
Source : [Hayward & Toft, 2019, p. 36]

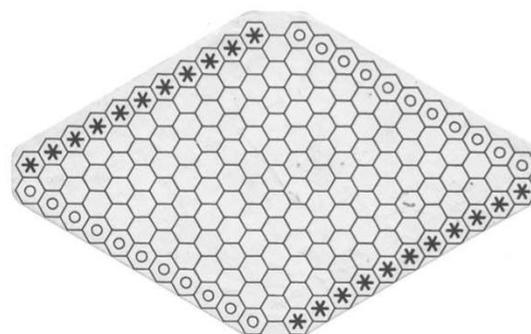


Figure 2 : Un tablier dessiné de *Polygon* pour jouer avec un crayon, « croix » contre « ronds ». À partir du moment où les sets furent mis en vente, le journal *Politiken* cessa de fournir un tablier vierge.
Source : [Hayward & Toft, 2019, p. 37]

Dès la parution de la première rubrique, l'emphasis est mise sur la simplicité du jeu et sa richesse d'analyse : « **Voulez-vous apprendre Polygon ?** Piet Hein a construit un jeu qui peut être pratiqué avec autant de joie par l'expert d'échecs et celui qui est simplement capable de tenir un crayon. » Piet Hein y décrit comment il est arrivé à inventer ce jeu, qui combine les deux idées suivantes (Figure 3) : 1) dans une case carrée, les paires de lignes émergeant des côtés opposés doivent nécessairement se croiser, donc sur cette base il est possible de créer un jeu dans lequel chaque joueur possède deux côtés opposés et un seul d'entre eux sera capable de connecter ses deux côtés, 2) cela ne fonctionne pas si le tablier est de forme rectangulaire (ou carrée) comme aux Échecs, car quatre cases ne se rencontrent qu'en un seul point, et les deux joueurs peuvent se bloquer l'un l'autre (et donc aucun d'eux ne peut connecter ses deux côtés).

Or ce n'est pas le cas dès lors que les cases sont de forme hexagonale (car trois cases – nombre impair – se rencontrent en un point). Ingénieux n'est-ce pas ?

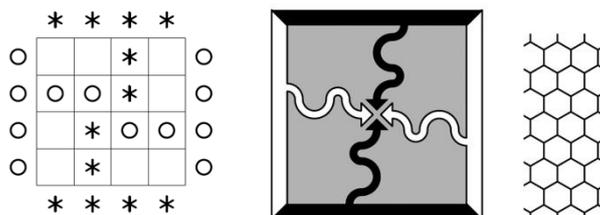


Figure 3 : À droite, illustration des deux principales idées qui ont amené Piet Hein à inventer *Polygon*. À gauche, illustration de blocage des deux joueurs si les cases sont rectangulaires. Source : [Hayward & Toft, 2019, p. 5 et p. 29]

À l'instar des « problèmes d'échecs » publiés dans certains journaux, Piet Hein propose dans sa rubrique de *Politiken* des « problèmes de Polygon » dont le premier est reproduit dans la Figure 4. Piet Hein était persuadé que les problèmes seraient la meilleure façon d'intéresser le lectorat du journal à *Polygon* et avait fait un appel à contribution quelques mois avant la parution de la première rubrique de décembre 1942 pour collecter des problèmes inventés par des personnes intéressées par le jeu (l'inventeur du problème retenu – choisi au hasard – remportait une dinde de Noël !). Les solutions devaient être adressées par voie postale au bureau éditorial du journal *Politiken*, et des prix étaient distribués : un premier prix de 50 couronnes danoises, un deuxième prix de 25 couronnes et 3 troisièmes prix de 10 couronnes chacun (aujourd'hui, 100 couronnes danoises seraient un peu près équivalentes à 300€). À chaque problème, au moins une centaine de solutions étaient envoyées (plus de 200 en mars 1943).

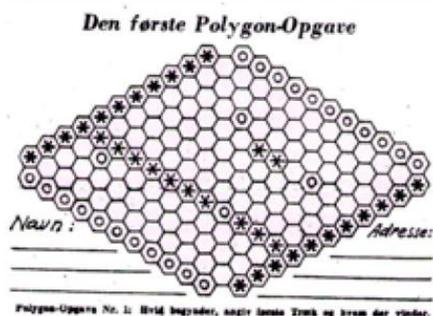


Figure 4 : Premier problème posé par Piet Hein dans *Politiken* concernant une partie de *Polygon*, « *Politiken* publie aujourd'hui un problème, sujet à récompense, qui donnera des maux de tête aux débutants. » C'est aux blancs de jouer, où doivent-ils placer leur rond ? Qui gagne ? Source [Boutin, 2019a, p. 40]

Ce problème est laissé aux lecteur-trices, et pour celles et ceux qui souhaitent s'exercer davantage, nous renvoyons à la rubrique « défis » de cette brochure ! Notons que pour se

souvenir de l'ordre des coups, chacun des deux joueurs pouvait noter sur la case choisie le numéro de son coup (1 puis 2 puis 3, etc.) ; les blancs entouraient le numéro (comme pour symboliser le rond blanc) tandis que les noirs laissaient leur numéro tel quel.

Remarque : historiquement, l'inversion (ou la Swap Rule) n'est pas présentée par Piet Hein en 1942, elle a donc été introduite ultérieurement, mais nous ne savons pas par qui exactement. Piet Hein affirmait que jouer le premier, sur la case du milieu, n'assurait pas nécessairement la victoire aux blancs.

- Hex aux États-Unis à la fin des années 1940

Six ans après la disparition de la rubrique dédiée au jeu de Hex dans le journal danois *Politiken*, voilà qu'il refait mystérieusement surface dans la salle commune à Fine Hall de l'université de Princeton, notamment grâce à un certain John Nash (1928-2015) qui le présente à son camarade David Gale (1921-2008) comme un jeu de pure stratégie à information parfaite⁷ pour lequel il peut prouver que le premier joueur est gagnant s'il ne commet par d'erreur, sans pour autant réussir à en déterminer la stratégie exacte. L'histoire se complique quand il s'agit de déterminer qui des deux mathématiciens est à l'origine du tablier de taille 14 x 14 aux cases hexagonales... tous deux prétendront en avoir eu l'idée le premier !

De nombreux écrits retraçant l'histoire du jeu de Hex aiment à présenter une « renaissance » du jeu aux États-Unis, sans aucun lien avec le *Polygon* de Piet Hein. Pourtant, une enquête plus approfondie de Michel Boutin (2019a), basée sur l'ouvrage de Ryan Hayward et Bjarne Toft (2019), avance des arguments qui remettent en question une invention indépendante de Nash. Tout d'abord, Nash et Gale tiennent des propos contradictoires au sujet de la forme initiale du tablier (triangulaire ou hexagonale) Ensuite, de nombreux mathématiciens et étudiants scandinaves qui connaissaient *Polygon*, sont partis aux États-Unis à cette époque, et certains ont étudié à Princeton au même moment que Nash et Gale. D'ailleurs, Piet Hein était lui-même aux États-Unis en 1944 avant de rejoindre l'Argentine, et est allé en 1948 à Princeton où il a montré *Polygon* à des étudiants en physique et à Albert Einstein – qui aurait été fasciné par le jeu ! Enfin, Aage Bohr – qui connaissait le jeu de Piet Hein par la conférence qu'il a donnée en 1942 à l'université de Copenhague – a également séjourné à Princeton pendant le premier semestre de 1948 et l'aurait présenté à l'*Institute for Advanced Study*, captivant ainsi les étudiants de mathématiques de l'Institut et de l'université de Princeton. En tout état de cause, il

⁷ C'est-à-dire à information complète et sans hasard.

est extrêmement difficile d'attribuer la paternité d'un jeu à untel ou unetelle, car il n'est pas possible de déposer un brevet pour un jeu qui soit réellement complet et couvre à la fois le matériel, son utilisation, les règles, les mécanismes de jeu, l'univers du jeu, etc. (voir Encart **Sur les questions d'auteur pour les jeux**), mais il est indéniable que Piet Hein fut le premier à avoir communiqué sur le jeu de Hex tel qu'on le connaît aujourd'hui.

Gale⁸ était persuadé que le jeu pourrait plaire au grand public – alors que Nash n'était intéressé que par l'invention d'un jeu dont on sait qu'il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur mais sans la connaître – et écrivit à Parker Brothers pour leur décrire le jeu, mais ces derniers n'y auraient manifesté aucun intérêt. Pourtant, en 1950, Parker Brothers dépose un brevet sous le nom de « Rules for playing game of Hex. Sheet, illus., © 21Apr50 ; AA148849 », sur un tablier 11 x 11, et courant novembre-décembre de la même année des pages de publicités apparaissent dans le magazine *Life* annonçant la commercialisation imminente de *Hex the Zig Zag game of block and counter-block*, vendu pour \$2.00.

Sur les questions d'auteur pour les jeux

En France, les trois piliers de la protection industrielle sont les *brevets d'invention*, les *marques de fabrique* et les *dessins & modèles*. Ce sont des titres de propriété industrielle, c'est-à-dire des systèmes juridiques de protection des inventeurs et entreprises. Ils sont complémentaires et protègent différentes facettes de la créativité. Ces trois entités sont particulièrement intéressantes à consulter pour trouver des informations de nature historique, sociologique, voire même commerciale au sujet d'objets manufacturés ou issus de la création artistique, comme pour les jeux. Elles permettent de retrouver un nom d'inventeur, un logo d'entreprise, une date d'édition, etc. Un objet déposé (c'est-à-dire qu'il a été accepté par l'administration) comme un jeu de pions par exemple, peut être inséré dans une ou plusieurs classes selon son usage et ses particularités technologiques.

Pour en savoir plus, consulter le livre de Pierre Parlebas et Michel Boutin « Jeux sportifs, jeux de société et classifications » paru en 2021.

- Les premières éditions commercialisées des années 1950

⁸ Gale ne cessera de porter un intérêt accru aux jeux : entre 1991 et 1997, il tient une rubrique pour le journal *Mathematical Intelligencer*, intitulée « Divertissements mathématiques » (*Mathematical Entertainments*).

La première édition commercialisée du jeu de Hex, *Game of Hex*, se fait aux États-Unis par l'éditeur Parker Brother en 1950 (Figure 5), sur un tablier de taille 11 x 11. Mais ce dernier retire rapidement le jeu de son catalogue, vers 1955, en raison de ventes insuffisantes⁹. Cette première édition ne passe néanmoins pas inaperçue et le célèbre auteur américain de jeux et récréations mathématiques Martin Gardner (1914-2010) – qui tient pendant 25 ans la colonne « Jeux mathématiques » dans le périodique *Scientific American* – y consacre un premier article en 1957, intitulé « À propos du jeu de Hex, qui peut se jouer sur le carrelage du sol de la salle de bain », dans lequel il tente de retracer toutes les facettes historiques du jeu (il échangea près de 30 lettres avec Piet Hein pendant l'année 1957), et contribue ainsi indubitablement à faire connaître le jeu et son histoire, et à le diffuser aux États-Unis.



Figure 5 : *Game of Hex* édité par Parker Brother aux États-Unis en 1950, tablier 11 x 11. Collection et photo : Michel Boutin

Le jeu est ensuite produit au Danemark, édité sous le nom *Con-Tac-Tix* en 1968 (Figure 6), sur un tablier 12 x 12, par l'association des deux éditeurs Parker Brother et Skjolder og Skjern.

⁹ Parker Brother ne mentionne pas les noms des acteurs qui ont joué un rôle dans l'invention ou la diffusion du jeu : ni Piet Hein, ni *Politiken*, ni la famille Bohr, ni même John Nash ou David Gale...



Figure 6 : *Con-tac-tix* produit au Danemark à partir de 1968, tablier 12 x 12, produit par Parker Brother et Skojde pf Skjern. Les pions sont de petits cylindres en bois. Collection et photo : Michel Boutin

Aujourd'hui il existe plusieurs versions du jeu de Hex, mais les différences résident uniquement dans les matériaux de conception des tabliers et des jetons (parfois la taille du plateau), les règles étant suffisamment simples pour ne pas être modifiées !

L'intérêt du jeu de Hex pour les mathématiques et l'informatique

La théorie derrière le jeu de Hex est à l'articulation de plusieurs domaines mathématiques tels que la théorie des graphes, la théorie des jeux et la théorie des jeux combinatoires. Elle présente des preuves élégantes montrant par exemple que le jeu de Hex n'admet pas de partie nulle, ou que le premier joueur peut gagner (voir la section **Jeu de Hex et mathématiques** ci-dessous). Des premières machines électroniques construites par l'ingénieur en génie électrique et mathématicien américain Claude Shannon (1916-2001) aux programmes qui utilisent la recherche arborescente Monte Carlo, le jeu de Hex se retrouve utilisé de façon continue comme objet d'étude de l'intelligence artificielle.

- Les mathématiciens se prennent au jeu

On peut noter que le jeu de Hex a particulièrement intéressé les mathématiciens de son époque : le Danois Piet Hein l'invente, les Américains John Nash et David Gale y consacrent des après-midis ludiques à Princeton, aux côtés d'autres étudiants, futurs mathématiciens reconnus (Prix Abel ou Prix Wolf), tels John Milnor, John Tate ou encore Robert O. Winder. Martin Gardner le remet ensuite au goût du jour pour le plaisir des amateurs de mathématiques récréatives aux États-Unis, mais également en Europe, certains de ses ouvrages (compilations de problèmes)

ayant par exemple été traduits en français. En France, c'est le mathématicien Claude Berge (1926-2002) qui se pique au jeu de Hex ; de nombreux témoignages de collègues affirment qu'il adorait y jouer avec ses hôtes. Il ponctuait les parties de grands « aaahhhh » avec un pétilllement dans les yeux quand il plaçait une pierre sur le tablier, suggérant ainsi à son adversaire qu'il avait trouvé un coup miraculeux qui renverserait complètement la partie ! Il jouait quasi-quotidiennement au jeu de Hex et avait appris à Ryan Hayward¹⁰ les connexions virtuelles (cf. « Vitesse et maillons » dans **Bases tactiques et stratégiques**) et les régions du tablier où il est préférable de jouer (Figure 7).



Figure 7 : Claude Berge (1926-2002) et Ryan Hayward en train de jouer une partie de Hex sur le tablier de voyage de Claude Berge, probablement vers 1995 ou 1996. Source : [Hayward & Toft, 2019, p. 163] © Chinh Hoàng.

Claude Berge a même rédigé en 1977 un manuscrit de quelques pages intitulé *L'Art Subtil du Hex*, qui ne sera jamais publié – mais qui a été traduit en anglais par Ryan Hayward au début des années 2000. Dans ce manuscrit, différentes sections abordent les points suivants : les mathématiques du jeu de Hex, la stratégie, des problèmes ainsi que les règles et ses origines... En somme, l'équivalent de la brochure que vous tenez entre vos mains ! Tout comme l'article de Martin Gardner en 1957 dans le journal *Scientific American* avait permis de faire connaître le Hex aux États-Unis, Claude Berge espérait le faire découvrir et le diffuser en France.

Claude Berge et le jeu de Hex

- D'après Ryan Hayward, Claude Berge se déplaçait toujours avec un tablier de Hex, même quand il se rendait à des conférences ou colloques mathématiques. Pendant un séjour de 6 mois passé à Paris en 1984 pour sa recherche, Ryan Hayward explique qu'il rendait visite

¹⁰ Co-auteur du livre *Hex The Full Story*, publié en 2019, qui retrace en détails toute l'histoire du jeu de Hex, avec de nombreuses photos et documents d'archive.

quotidiennement à Claude Berge à son bureau, à la *Maison des Sciences de l'Homme* boulevard Raspail à Paris et qu'ils jouaient systématiquement une partie de Hex pour se changer les idées des considérations mathématiques sur lesquelles ils étaient en train de travailler (il y avait aussi d'autres jeux de plateau dans le bureau, comme un tablier Échecs ou de Backgammon).

- Pendant l'année universitaire 1958-1959 Claude Berge est allé à Princeton et il semblerait que ce soit à ce moment qu'il ait fait la connaissance du jeu de Hex, ce dernier rappelons-le étant particulièrement joué dans la salle commune du département de mathématiques ! (Par ailleurs, Claude Berge s'intéressait beaucoup aux travaux de John Nash sur le point d'équilibre dans un jeu multi-joueurs, il n'est donc pas impossible qu'ils se soient rencontrés et aient disputé une partie !). Il aurait fait l'acquisition de son premier tablier de Hex en 1970 qui était la version danoise mentionnée ci-dessus, *Con-tac-tix*, de taille 12 x 12. Par la suite, il avait construit son propre tablier de taille 14 x 14, mais il n'était pas pratique à transporter.

- Claude Berge avait apparemment pour ambition de commercialiser ses propres tabliers de Hex et à cette fin avait prototypé une demi-douzaine de tabliers, dont certains dans des couleurs inédites : un rose, un argenté et un noir. Une des raisons pour lesquelles le projet n'a pas abouti semble être due au fait que Claude Berge n'aurait pas trouvé de fournisseur proposant des prix abordables. Il subsiste néanmoins de ce projet le manuscrit rédigé pour accompagner le tablier, intitulé *L'Art Subtil du Hex*, avec pour sous-titre *Introduction au jeu de Hex – tiré de la préface à la première version commerciale du Hex 14 x 14 (1977)*.

Vous l'avez compris, le jeu de Hex se prête vraiment bien à l'étude mathématique et de nombreux articles scientifiques et travaux de thèse lui sont consacrés. Il est également utilisé en formation, pour faire découvrir à des élèves ou à des étudiants les stratégies gagnantes sur des petits tabliers et travailler leur raisonnement. Récemment, des mathématiciens américains se sont même penchés sur son analyse sur un tablier infini (c'est-à-dire avec un nombre infini de cases) et ont montré que si les deux joueurs jouent correctement, toute partie aboutit à un match nul¹¹... mais ça peut prendre un certain temps !

- Intérêt du jeu de Hex pour l'intelligence artificielle

¹¹ Voir l'article de Jean-Paul Delahaye dans le numéro 560 de *Pour la Science*, publié en 2024.

Au jeu de Hex, tout comme pour d'autres jeux de tabliers comme les Échecs ou le Go, dès que les ordinateurs deviennent un peu plus puissants, des personnes commencent à écrire des programmes destinés à jouer. De tels programmes combinent typiquement évaluation et recherche : à partir d'une position de jeu initiale, ils cherchent à évaluer les prochains coups possibles et, dans un temps raisonnable, explorer en profondeur les coups qui semblent les plus forts pour ensuite déterminer le coup initial avec la meilleure valeur renvoyée par l'algorithme Minimax¹². Donc à partir du moment où le jeu de Hex commence à circuler aux États-Unis dans les années 1950, se développent – en parallèle des analyses mathématiques – les premiers robots, machines analytiques et programmes destinés à jouer au Hex. Claude Shannon (1916-2001) par exemple, bien connu pour ces animaux cybernétiques capables d'apprendre à sortir d'un labyrinthe, fait la description en 1951 d'une machine capable de jouer au jeu de Hex¹³. Shannon a également imaginé un jeu de connexion, *Red/black game*, variante de Hex maintenant connue sous le nom *Bridg-it*, pour lequel il a conçu une machine pour y jouer à partir d'un réseau de résistances électriques. Cela revenait à jouer sur un tablier de taille 6 x 6 et apparemment son circuit jouait bien pendant la première phase du jeu¹⁴.

Il faut ensuite attendre 1995 pour que le bot de Robert Enderton, étudiant en même temps que John Nash au Carnegie Institute of Technology de Pittsburgh, automatise le processus de résolution des positions au jeu de Hex, fournissant ainsi toutes les ouvertures (premières phases d'une partie) gagnantes pour un tablier 6 x 6, ainsi que trois ouvertures gagnantes pour un tablier 7 x 7. D'autres solveurs (logiciels ou programmes informatiques qui résolvent des problèmes mathématiques) voient le jour à la fin des années 1990 : *Hexy* de Vadim Anshelevich et *Queenbee* en 1998 de Jack van Rijswijk qui prolonge les résultats de celui de Robert Enderton en trouvant les issues des parties (victoire ou échec) pour de nombreuses ouvertures sur un tablier 6 x 6. En 2003, le solveur *Solver* (!) d'une équipe de l'université d'Alberta trouve la valeur des issues des parties pour toutes les ouvertures sur un tablier 7 x 7. Il faut ensuite attendre 2012 pour qu'il détermine l'ensemble des ouvertures gagnantes d'un tablier 9 x 9 et 2013 pour certaines ouvertures gagnantes sur un tablier 10 x 10. C'est également à ce moment qu'entrent en compétition les premiers programmes de Hex : *Six*, *Moongoose*, *Wolve*, ou encore

¹² Algorithme qui s'applique à la théorie des jeux à deux joueurs, consistant à *minimiser* la perte *maximale* dans une position de jeu.

¹³ Shannon a aussi construit un robot pour jouer au jeu de Hex, appelé *Hox*, qui gagne toutes les parties quels que soient les joueurs. En fait, la machine était truquée et présentait une case de moins dans les deux bords du tablier qui lui étaient attribués que dans les deux bords attribués au joueur humain. Ainsi, même si elle jouait en second, elle avait en réalité l'avantage ! Voir (Boutin, 2019a, p. 46) pour une photo de la machine en question.

¹⁴ Voir (Boutin, 2019a, p. 45) pour une photo de la machine.

HexKriger. En 2006, avec la victoire du programme *Crazystone* de Rémi Coulom au jeu de Go, basé sur une recherche Monte Carlo, les programmes vont se modifier. La recherche Monte Carlo, contrairement à l'algorithme Minimax qui analyse à une profondeur fixée, explore les coups qui semblent forts bien plus en profondeur et bien plus précisément que les coups qui semblent faibles. On retrouve donc des méthodes similaires de programmation dans les programmes *AlphaGo* (pour le jeu de Go) et *MoMex*, *Panoramex* ou encore *Yopt* (pour le Hex). En 2019, MoMex perdait encore contre des humains sur un tablier 13 x 13 et aujourd'hui (2024), aucune stratégie gagnante pour un tablier 11 x 11 n'a encore été mise en évidence, bien qu'on sache qu'elle existe pour le premier joueur ! (Voir section **Jeu de Hex et mathématiques** ci-dessous).

Dans le domaine de l'intelligence artificielle, les jeux de type Hex (dits « combinatoires », voir ci-dessous) ont servi et servent encore de supports pour jauger le niveau de performance des recherches : le jeu d'Échecs avec le supercalculateur *Deep Blue* d'IBM – qui a battu le champion du monde Garry Kasparov en 1997 – le jeu de Dames anglaises sur un plateau 8×8 avec le programme *Chinook* – qui après 20 ans de calculs sur plus de 50 machines a montré en 2007 qu'une partie s'achève sur une partie nulle lorsque les deux joueurs jouent optimalement – ou encore le jeu de Go et le programme *AlphaGo* de Google – qui a battu le champion du monde Lee Sedol en 2016. Un des défis actuels pour la communauté réside dans la compréhension théorique des jeux à boucle ou des jeux à score comme le Go, l'Othello ou le Dots and Boxes (Jeu des Petits Carrés en français).

Jeu de Hex et mathématiques

Le lecteur s'en sera rendu compte, le jeu de Hex se révèle être un véritable objet d'intérêt scientifique, de par ses mécanismes de jeu (connexion, 2 joueurs, coups alternatifs) mais aussi par la forme singulière de son plateau et des cases qui le composent (hexagonales). Et ce n'est pas le seul jeu auquel les mathématiciens s'intéressent ! Il existe aujourd'hui tout un champ des mathématiques consacré à l'analyse de tels jeux : la théorie des jeux combinatoires. Ces derniers vérifient les caractéristiques bien particulières suivantes :

- deux joueurs exactement ;
- coups alternatifs (pas de simultanéité comme au Pierre-feuille-ciseaux ou au Jungle Speed) ;
- information complète de la situation de jeu à tout moment (pas de cartes cachées) ;
- il n'y a pas de hasard (pas de lancers de dés, de tirages de cartes) ;

- l'issue de la partie est uniquement déterminée par le dernier coup. Les exemples les plus connus sont les Échecs, les Dames, le Morpion, le Puissance 4, et le Hex !

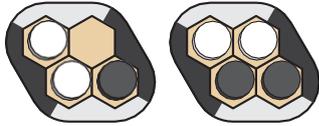
Si le terme *combinatorial game* apparaît au début des années 1970, donnant naissance depuis le milieu des années 1970 à un domaine de recherche à part entière (*combinatorial game theory*) notamment grâce aux travaux d'Elwyn Berlekamp (1940-2019), John Conway (1937-2020) et Richard Guy (1916-2020), les premières résolutions exactes de jeux combinatoires datent de la fin du XIX^e voire du XVI^e siècle dans le cadre des récréations mathématiques (voir encart **Sur les récréations mathématiques** plus haut).

Les enjeux principaux de la théorie des jeux combinatoires, que ce soit en mathématique ou en informatique, reposent sur plusieurs problématiques majeures : si on suppose que les deux joueurs jouent optimalement à chaque tour, qui sera le vainqueur ? Peut-on construire une stratégie gagnante pour ce vainqueur, c'est-à-dire une séquence de coups qui amène à la victoire quels que soient les coups joués par l'adversaire ? On connaît depuis 1913 un théorème remarquable dû au mathématicien Ernst Zermelo (1871-1953) qui indique qu'aux Échecs soit les Blancs peuvent gagner quelle que soit la manière de jouer des Noirs, soit les Noirs peuvent gagner quelle que soit la manière de jouer des Blancs, soit chaque joueur peut arriver à un nul quelle que soit la manière dont l'adversaire joue. Ce résultat, qui paraît évident, repose sur une démonstration qui l'est moins mais qui permet de montrer que le jeu d'Échecs – et d'autres jeux combinatoires – est un jeu *déterminé*. Toute la difficulté réside bien évidemment dans l'explicitation de la stratégie à mettre en place !

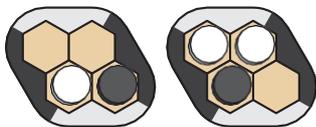
Pour cela, nous allons introduire un peu de vocabulaire lié à la théorie des jeux combinatoires et considérer que le jeu se finit toujours sur une victoire ou un échec (pas de partie nulle), cela simplifie un peu la théorie.

Dans un tel jeu, on peut définir facilement la notion de position. Par exemple, dans le jeu de Hex, la position est la configuration du plateau (i.e. le nombre de pions de chaque couleur et la position de chacun d'entre eux). À partir d'une position donnée, le joueur qui doit jouer a le choix de donner à son adversaire un certain nombre de positions que tout le monde connaît. On peut alors définir inductivement (c'est-à-dire « de proche en proche ») les notions de position gagnante et de position perdante en n coups pour un certain joueur ; on définira aussi la notion de position impossible. Pour introduire ces définitions, nous allons considérer l'exemple du jeu de Hex de taille 2.

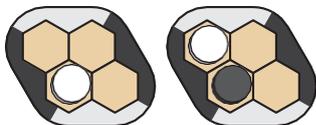
Une position est dite perdante en 0 coup pour un certain joueur si c'est une position perdue pour lui (c'est-à-dire si un chemin reliant les bords de son adversaire est présent). Par exemple, parmi les deux positions ci-contre, celle de gauche est perdante en 0 coup pour les noirs et celle de droite est perdante en 0 coup pour les blancs.



Une position est dite gagnante en $n + 1$ coups pour un certain joueur si, à partir de cette position, il peut donner à son adversaire au moins une position perdante en n coups et s'il ne peut pas en donner une perdante en moins de n coups. Ainsi, parmi les deux positions ci-contre, celle de gauche est gagnante en 1 coup pour les blancs (car ils ont moyen de donner aux noirs une position perdante en 0 coup) et celle de droite est gagnante en 1 coup pour les noirs.



Une position est dite perdante en $n + 1$ coups pour un certain joueur si, à partir de cette position, il ne peut donner à son adversaire que des positions gagnantes, au maximum en n coups. Par exemple, parmi les deux positions ci-contre, celle de gauche est perdante en 2 coups pour les noirs et celle de droite est perdante en deux coups pour les blancs.



Une position est dite impossible pour un certain joueur (c'est-à-dire quand il va jouer) s'il n'est pas possible d'après les règles du jeu qu'il reçoive cette position de son adversaire. Par exemple, les positions suivantes sont impossibles :



En fait, les seules positions possibles pour les blancs (quand ils s'apprêtent à jouer) ont autant de pions blancs que de pions noirs (puisque les deux joueurs ont joué le même nombre de coups auparavant). De la même façon, les seules positions possibles pour les noirs ont un pion blanc de plus que de pions noirs. De plus, il est impossible pour les blancs de recevoir une position où il y a déjà un chemin blanc entre les deux bords blancs et pour les noirs de recevoir une position où il y a déjà un chemin noir entre les deux bords noirs (d'après les règles, le jeu se serait terminé avant).



On peut construire de proche en proche la figure 1 en partant des positions gagnées. On voit que la position ci-contre est gagnante en trois coups pour les blancs. En étudiant les positions gagnantes et perdantes pour les noirs, on se rend compte que les coups A et D sont gagnants pour les blancs, tandis que les coups B et C ne le sont pas. La stratégie gagnante pour les blancs consistera donc à jouer en A ou en D.

On voit que toutes les positions qui ne sont pas impossibles apparaissent dans la figure 1. Autrement dit, toute position qui n'est pas impossible pour les blancs est soit gagnante pour les blancs soit perdante pour les blancs. Il en est de même pour les noirs. En fait, c'est vrai pour toutes les tailles de plateaux, et plus généralement pour tous les jeux ayant les propriétés citées au début de cette partie. Il est possible de le montrer par récurrence.

Pour résumer, un joueur a une stratégie gagnante à partir d'une certaine position si cette position est soit gagnante pour lui, soit perdante pour son adversaire. Si une position est gagnante pour un joueur, il peut choisir de donner une position perdante à son adversaire (un tel coup est appelé coup gagnant), et ensuite, son adversaire est obligé de lui donner une position gagnante. Ainsi, il peut continuer avec la même stratégie jusqu'à gagner.

En règle générale, bien entendu, on ne peut pas espérer calculer complètement un tableau du type de la figure 1, qui serait beaucoup trop grand (par exemple sur un plateau de Hex de taille quatorze, ou, pour parler d'un autre jeu, aux Échecs). Ceci dit, beaucoup de programmes informatiques ainsi que les bons joueurs de ce type de jeu (Hex ou Échecs par exemple) partent de cette idée de base pour analyser une position. Bien qu'ils n'aient pas la capacité d'analyser

la partie jusqu'au bout comme dans le cas du plateau de taille 2 (ou un peu plus grand pour un ordinateur), ils peuvent analyser un certain nombre de coups (raisonnements du type « si je fais ça, mon adversaire va faire ça et alors je ferai ça. . . ») et ainsi se faire une idée plus fine de l'intérêt tactique d'un coup.

Plus précisément, on va montrer que toute position possible pour un certain joueur où il reste n cases vides est soit gagnante en au plus n coups, soit perdante en au plus n coups pour ce joueur (on peut voir, en regardant la définition, qu'une position ne peut pas être à la fois gagnante et perdante pour un joueur).

Tout d'abord, une position possible pour un certain joueur dont aucune case n'est vide est forcément perdue. En effet, d'après ce qu'on a vu plus haut (voir la partie il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex), il y a soit un chemin blanc entre les bords blancs, soit un chemin noir entre les bords noirs. Mais il est aisé de voir qu'un joueur ne peut pas recevoir une position qui a un chemin de sa couleur déjà tracé, car dans ce cas, d'après la règle du jeu, la partie se serait terminée avant.

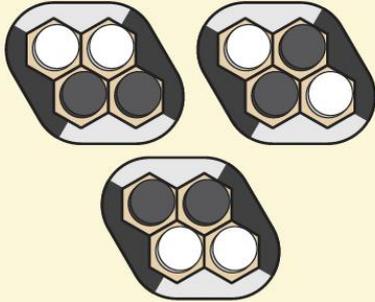
Supposons maintenant que la propriété que l'on veut démontrer soit vraie pour n . On va montrer qu'elle est vraie pour $n + 1$. Soit donc une position P dont le plateau a $n + 1$ cases vides et qui n'est pas une position impossible pour un certain joueur J . De deux choses l'une : soit ce joueur a perdu et par définition la position est « perdante en 0 coup pour lui ». Sinon, le joueur J a un certain nombre de choix de positions qu'il peut donner à son adversaire A .

Par hypothèse de récurrence, chacune de ces positions est soit perdante en au plus n coups pour A , soit gagnante en au plus n coups pour A . Si au moins l'une de ces positions est perdante pour A (en au plus n coups), alors la position P est gagnante en au plus $n + 1$ coups pour J . Sinon, toutes les positions que J peut donner à A sont gagnantes pour A (en au plus n coups) et donc, P est perdante en au plus $n + 1$ coups pour J .

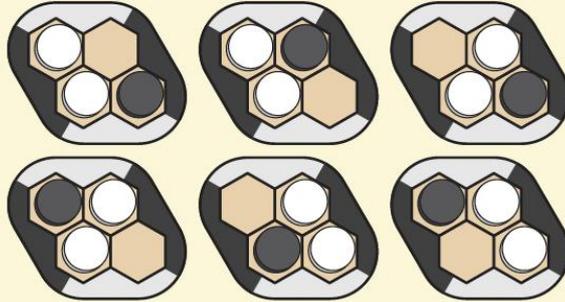
Cela permet de conclure la récurrence : on a montré que toute position avec $n = 0$ case vide restante était soit gagnante soit perdante en $n = 0$ coup, puis, comme c'est vrai pour $n = 0$, c'est aussi vrai pour $n + 1 = 1$ d'après ce qu'on vient de voir, puis, comme c'est vrai pour $n = 1$, c'est aussi vrai pour $n + 1 = 2$ et ainsi de suite. C'est bien vrai tout le temps.

FIGURE 1 – Positions gagnantes et perdantes du jeu de Hex de taille 2

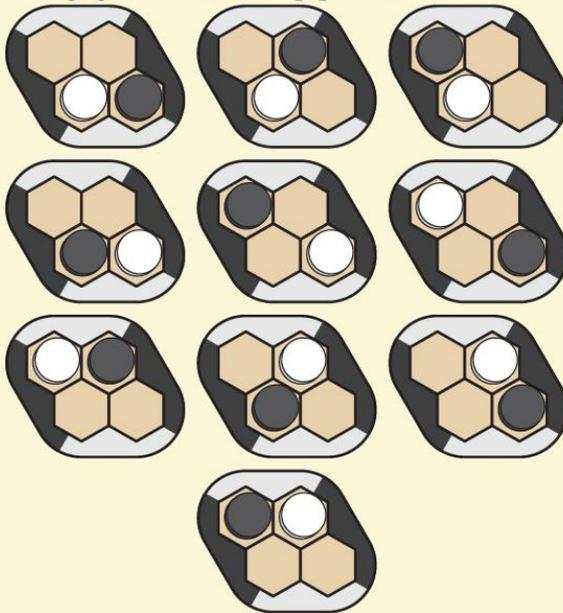
perdante en 0 coup pour les blancs



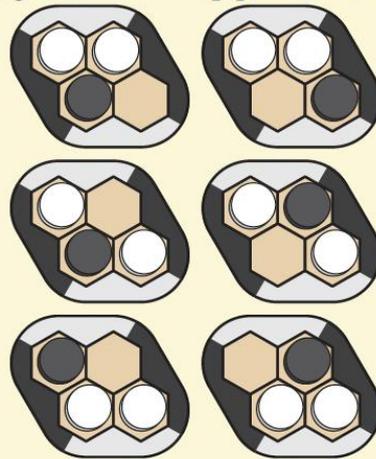
perdante en 0 coup pour les noirs



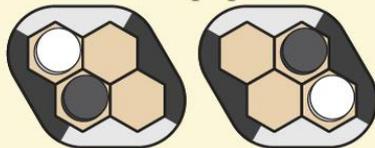
gagnante en 1 coup pour les blancs



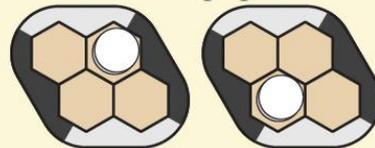
gagnante en 1 coup pour les noirs



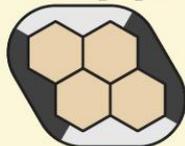
perdante en 2 coups pour les blancs



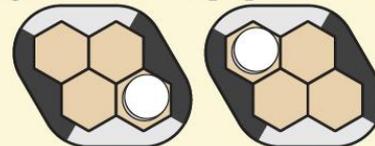
perdante en 2 coups pour les noirs



gagnante en 3 coups pour les blancs



gagnante en 3 coups pour les noirs

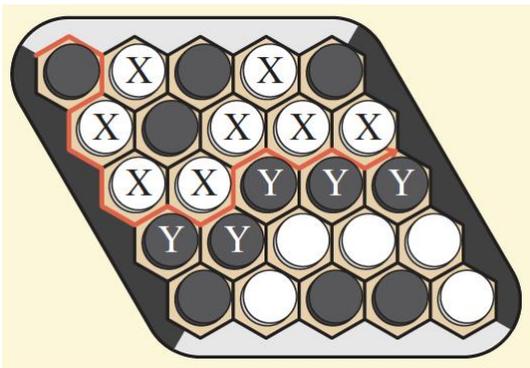


Il n'y a pas de position perdante en 4 coups

Capture d'écran

POUR ALLER PLUS LOIN

Il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex. En effet, que serait une partie nulle au jeu de Hex ? Ce serait une partie où tout le plateau serait rempli de pions blancs et noirs (sinon, on pourrait continuer à jouer) mais où aucun chemin blanc entre les deux bords blancs ou noir entre les deux bords noirs ne serait présent. Remarquons qu'il ne peut pas y avoir en même temps un chemin blanc reliant les bords blancs et un chemin noir reliant les bords noirs. En effet, si deux tels chemins existaient, ils se « croiseraient » forcément, nous l'avons vu dans la section **Naissance du jeu au Danemark**.



L'idée *intuitive* est que, lorsque le plateau est rempli, si l'on regarde l'ensemble des pions blancs (X) liés au bord blanc du haut, alors, soit il touche le bord blanc du bas et les blancs ont gagné, soit il ne le touche pas et cet ensemble a une frontière de pions noirs (Y) qui relie alors les deux bords noirs et les noirs ont gagné.

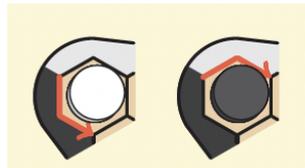
Pour prouver ce résultat de façon rigoureuse, on va supposer qu'une fourmi part du coin en haut à gauche et se déplace sur les arêtes des cases en suivant la règle suivante :

- si elle rencontre le bord du bas ou le bord de droite, elle s'arrête ;
- sinon, elle avance en laissant du blanc (un pion ou un bord) à sa gauche et du noir à sa droite (un pion ou un bord).

Par exemple, dans l'exemple précédent, elle aurait suivi le chemin marqué en rouge.

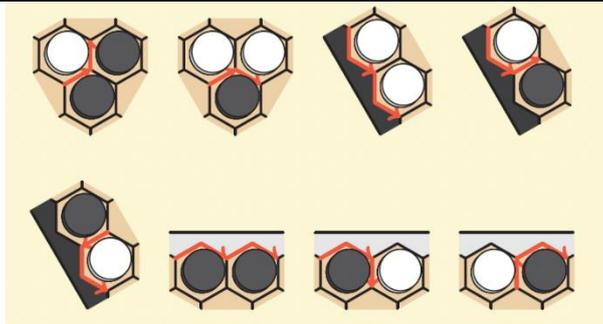
Remarquons alors plusieurs choses :

- la fourmi peut partir dans tous les cas du coin en haut à gauche mais jamais y revenir :

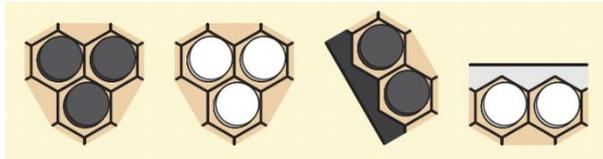


(en effet, il n'y a pas de chemin qui revient en haut à gauche avec du blanc à gauche et du noir à droite).

- Dans tous les cas de figures, en chaque sommet qui n'est pas dans un coin, il y a soit exactement une entrée et une sortie :



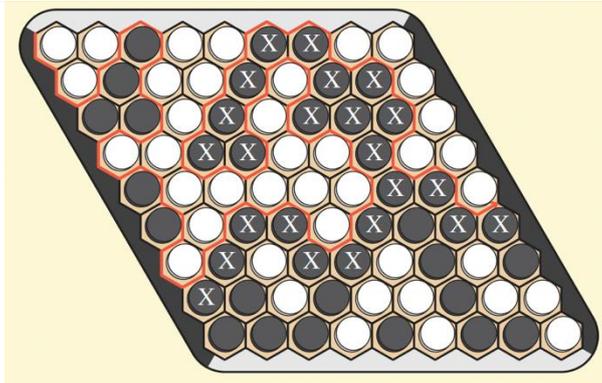
soit aucune entrée et aucune sortie :



Par conséquent, la fourmi peut toujours avancer tant qu'elle n'a pas atteint le bord du bas ou de droite et elle ne peut pas revenir deux fois au même endroit (en effet, la première fois où elle reviendrait à un endroit déjà visité, cela signifierait que le sommet en question a deux entrées). Du coup, comme le nombre de sommets est fini, son trajet ne peut pas être infini et on en déduit qu'elle atteindra obligatoirement à un moment le bord de droite ou le bord du bas.

Supposons qu'elle atteigne le bord de droite en premier. Regardons le chemin qu'elle a parcouru depuis la dernière fois où elle a quitté le bord de gauche (comme elle était au début sur le bord de gauche, elle l'a au moins quitté une fois). Ce chemin est entièrement bordé de noir à droite puisqu'elle laisse toujours du noir sur sa droite. Comme elle n'est pas passée par l'un des bords noirs pendant cette partie de son trajet, le noir qu'elle avait à sa droite était forcément constitué de pions. Du coup il y a un chemin de pions noirs reliant les deux bords noirs.

Si elle atteint le bord du bas en premier, on peut montrer de la même façon qu'il y a un chemin de pions blancs reliant les deux bords blancs. On a donc bien prouvé qu'il y a soit un chemin blanc reliant les bords blancs, soit un chemin noir reliant les bords noirs lorsque le plateau est rempli. Il ne peut donc pas y avoir de partie nulle. Un autre exemple, pour se convaincre :



La dernière partie du trajet rouge est bordée à droite de pions noirs X qui relient les deux bords noirs ; notez que l'on trouve un chemin noir parmi d'autres et que ce n'est pas forcément le plus court.

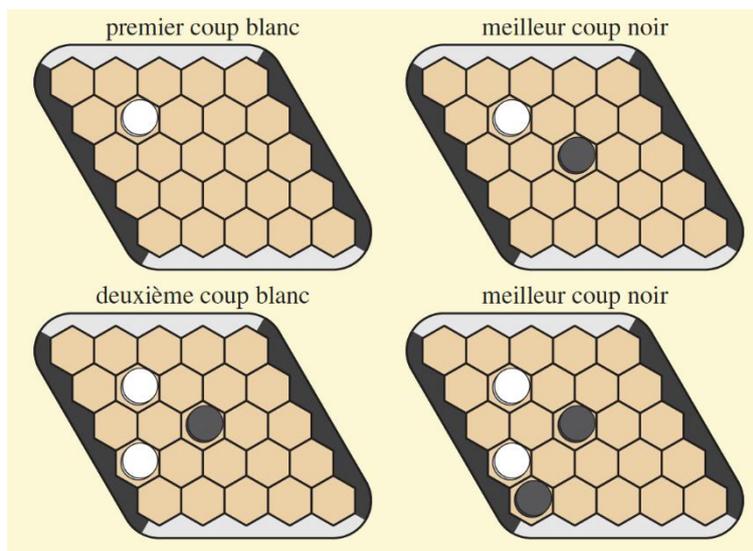
POUR ALLER PLUS LOIN

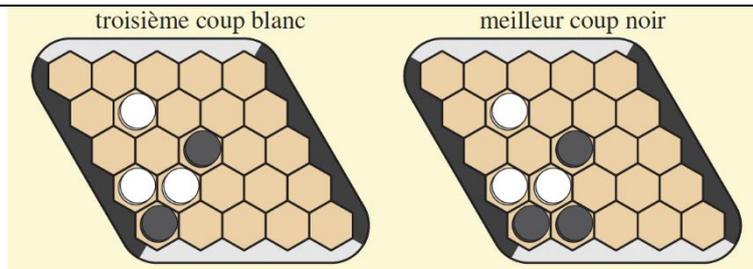
Il y a une stratégie gagnante pour les blancs. On va maintenant voir qu'il existe une stratégie qui permet de gagner à tous les coups pour les blancs (sur n'importe quelle taille de plateau). Malheureusement, mis à part le cas des petits plateaux, personne ne connaît cette stratégie ! (Voir section **Intérêt du jeu de Hex pour l'IA** plus haut) On se place dans le cas des règles les plus simples (les blancs peuvent jouer n'importe où au premier coup et les noirs n'ont pas le droit d'échanger).

Cette preuve est le cas d'école de ce que l'on appelle en mathématiques une preuve non constructive. On prouve indubitablement que les blancs ont une stratégie gagnante, mais sans pouvoir expliciter cette stratégie.

Tout d'abord, à un tel jeu, où il n'y a pas de partie nulle, et où les deux joueurs ont une information complète, sans hasard, soit les blancs ont une stratégie gagnante, soit les noirs ont une stratégie gagnante, comme nous l'avons dit ci-dessus au sujet des jeux combinatoires. Supposons donc que les noirs aient une stratégie gagnante.

Autrement dit, quel que soit le premier coup des blancs, ils ont un meilleur coup (qui dépend du premier coup). Ensuite, quel que soit le deuxième coup des blancs, ils ont un meilleur coup et ainsi de suite jusqu'à la fin de la partie où ils auront gagné. Par exemple, on suppose que le début d'une suite de meilleurs coups pour les noirs est :





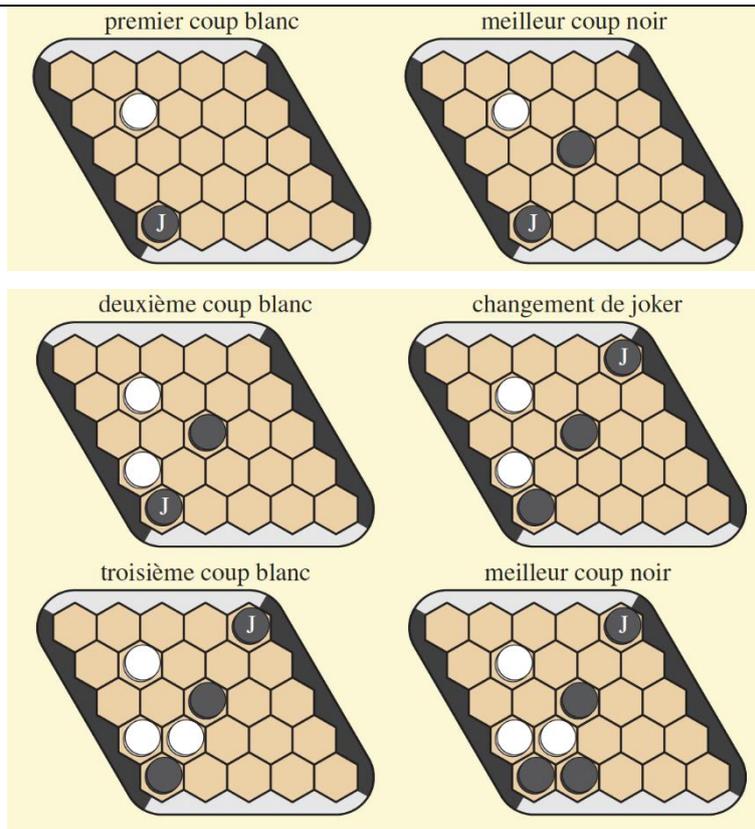
ATTENTION

Nous faisons ici une démonstration *par l'absurde*. On a *supposé* que la suite de coups était une suite gagnante pour les noirs. Ce n'est bien sûr pas le cas puisqu'on va justement démontrer qu'une telle suite n'existe pas. Il n'est donc pas question de prétendre ici que les noirs ont vraiment joué les meilleurs coups et encore moins les blancs. Il ne s'agit que d'un exemple pour illustrer l'argument qui s'appliquerait à n'importe quelle autre suite de coups. Ainsi, cet argument va prouver que cette suite de coups n'est pas gagnante pour les noirs, mais aussi qu'*aucune autre suite* de coups n'est gagnante pour les noirs.

Maintenant, supposons, juste pour un instant, que les noirs commencent la partie. Laissons-les alors placer un pion où ils veulent et appelons ce pion le *pion joker* (par exemple en bas à gauche). Ensuite, les blancs jouent où ils veulent (comme nous cherchons une stratégie gagnante pour les noirs, on doit en fait envisager tous les coups possibles pour les blancs). Les noirs, s'ils oublient le *pion joker*, ont, d'après l'hypothèse, un meilleur coup qui les feraient gagner. De deux choses l'une :

1. Soit leur meilleur coup n'est pas au même endroit que le *pion joker*. Dans ce cas, ils jouent ce meilleur coup et leur *pion joker* reste le même pion.
2. Soit leur meilleur coup est au même endroit que le *pion joker*. Dans ce cas, ils posent leur nouveau pion sur n'importe quelle case libre et il devient le *pion joker*. L'ancien *pion joker* devient un pion normal. De cette façon, ils se retrouvent dans la même situation que s'ils avaient depuis le début de la partie comme *pion joker* ce nouveau *pion joker* et s'ils avaient toujours appliqué la règle 1.

Par exemple (on considère le même exemple qu'avant) :



Les noirs vont donc jouer une partie qui ressemblera en tout point à une partie où les blancs ont commencé et où les noirs ont suivi leur stratégie gagnante, si ce n'est qu'ils ont un pion joker en plus. Il est facile de voir qu'un pion supplémentaire ne fait jamais perdre et n'empêche jamais de gagner au jeu de Hex. Finalement les noirs ont une stratégie gagnante aussi s'ils commencent. Bien entendu, le jeu est symétrique. Du coup, les blancs ont aussi une stratégie gagnante s'ils commencent, ce qui contredit l'hypothèse que les noirs en avaient une. Cela termine la preuve.

Jouons un peu : La stratégie présentée en exemple n'est pas gagnante pour les noirs.

Saurez-vous faire gagner les blancs (on enlève le pion joker) ? Où doivent-ils poser leur quatrième pion ?

Bases tactiques et stratégiques

Regarder les « tips » de Piet Hein donnés dans [Hayward & Toft, 2019, p. 28-11] et voir si ce sont les mêmes que ceux-là : si oui (ou sinon !) faire une remarque ou une note dessus.

Échelle par Piet Hein dans [Hayward & Toft, pp. 32-33] pour Tactique et stratégie N2.

→ à faire plus tard.

Dire que depuis le début, il y a des éléments stratégiques qui ont été identifiés.

Nous vous proposons de découvrir les premières tactiques et

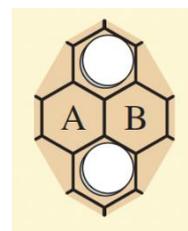
L'attaque et la défense.

Au jeu de Hex comme dans beaucoup d'autres jeux, il est possible de jouer en attaque ou en défense. Attaquer, c'est chercher à réaliser son propre objectif, c'est-à-dire à relier les deux bords de sa couleur. Défendre, au contraire, c'est empêcher l'adversaire de réaliser son objectif, c'est-à-dire tenter de bloquer ses chemins. Le fait qu'au jeu de Hex, il ne peut pas y avoir de partie nulle (démonstré dans la partie précédente), a une conséquence majeure : un joueur qui jouerait exclusivement en défense, c'est-à-dire qui ne chercherait qu'à bloquer son adversaire sans se soucier le moins du monde de son propre chemin, finirait automatiquement par en former un sans s'en préoccuper. Cette façon de jouer est assez puissante quand on commence à pratiquer le jeu. Si deux joueurs débutants jouent, l'un exclusivement en attaque et l'autre en défense, le second gagnera en moyenne plus souvent que le premier !

Vitesse et maillons.

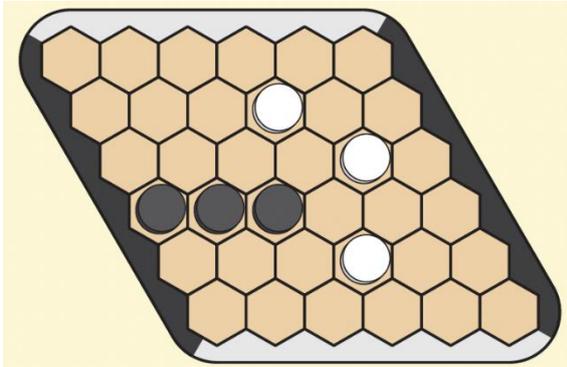
Un paramètre important du jeu de Hex est la vitesse. Vous observerez en effet rapidement en jouant que toute perte de temps (c'est-à-dire coup qui ne sert à rien) sera très vite sanctionnée. Un mauvais coup ne donne pas en soi un avantage à l'adversaire (un pion blanc ne peut pas faire partie d'un chemin noir et réciproquement). Cependant, il permet à l'adversaire de gagner un temps sur vous et de progresser plus vite. Ainsi, si vous êtes mal parti sur une partie du plateau, une bonne solution est souvent d'attaquer ailleurs.

La technique de base permettant d'avancer plus vite que d'une case par pion est l'avancée par maillons. Deux pions forment un maillon s'ils sont disposés comme sur la figure ci-contre (où les cases A et B sont inoccupées). Un maillon assure de pouvoir connecter les deux pions quoi qu'il arrive. En effet, si les noirs jouent en A, alors les



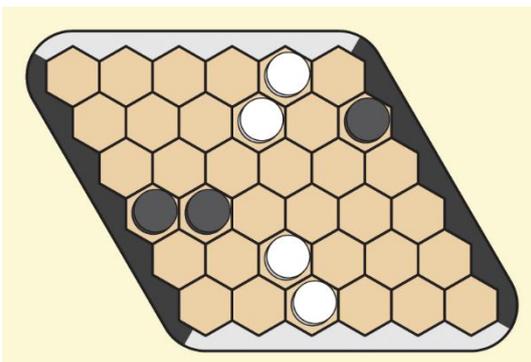
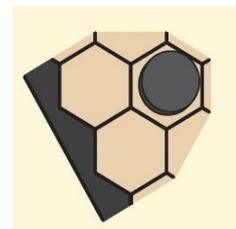
blancs peuvent jouer en B. Et si les noirs jouent en B, les blancs peuvent jouer en A.

C'est une des premières astuces de jeu donnée par Piet Hein lui-même lors de la parution de *Polygon* dans le journal *Politiken* en 1942 : il n'est pas nécessaire de placer ces pions sur deux cases adjacentes pour assurer la connexion !



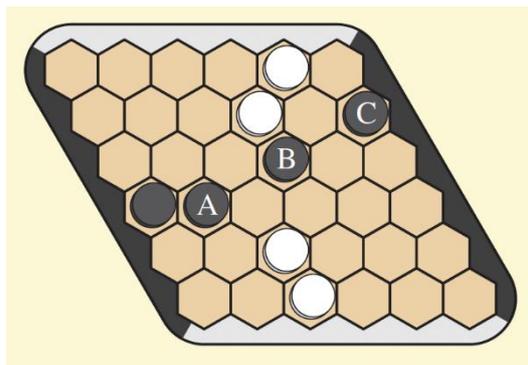
En pratique, les blancs ont rarement intérêt à relier deux pions en maillon tant que les noirs n'attaquent pas ce maillon. En effet, cela fait perdre un temps, que les noirs pourront peut-être utiliser ailleurs pour construire leur propre chemin. Par exemple, dans la situation ci-contre, les blancs peuvent gagner à coup sûr parce que les noirs ont perdu du temps à essayer de faire un chemin « sans trou ». Il est clair que la stratégie des blancs a été bien plus payante que celle des noirs.

Cette configuration en maillons revêt une importance capitale au jeu de Hex. En général, les joueurs essaieront, dans un premier temps, de former un chemin de pions reliés par des maillons. La configuration ci-contre proche du bord peut aussi être considérée comme un maillon dans la mesure où, pour les mêmes raisons que précédemment, elle permet aux noirs d'assurer la liaison avec le bord.



Exemple 1. C'est aux noirs de jouer. Essayez de trouver le coup qui leur permet de gagner quel que soit le jeu des blancs.

Solution. Les noirs doivent jouer sur la case B ci-contre. De cette façon, ils créent deux maillons, l'un reliant A et B, l'autre B et C. Vous pouvez essayer de vous convaincre que si les noirs jouent sur n'importe quelle autre case, alors ce sont les blancs qui deviennent gagnants car ils menacent eux aussi de créer plusieurs maillons entre leurs pions.



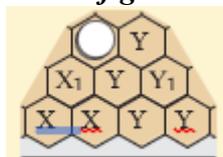
Relier un bord.



Pour qu'un pion posé à distance 1 du bord puisse être connecté à ce bord quels que soient les coups de l'adversaire il suffit qu'aucune des deux cases qui le relie au bord ne soit déjà occupée par un pion adverse. Si les noirs jouent en A, on relie le pion en jouant B et vice versa. C'est la tactique du maillon appliquée au bord en quelque sorte.

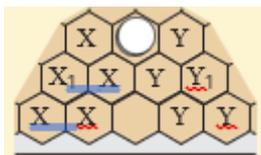
Pour un pion posé à distance 2 du bord, il existe deux dispositions classiques permettant de le relier au bord de façon certaine.

Configuration en trapèze.



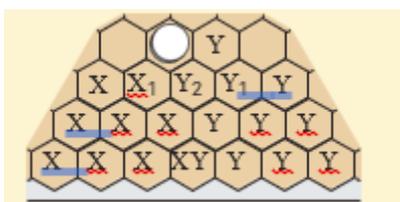
Le pion peut être relié au bord de façon certaine si les huit cases marquées ci-contre sont vides quand le pion blanc vient d'être posé. Si les noirs jouent ailleurs que sur l'une des cases notées X, alors les blancs relient le bord en jouant en X1 qui est à distance 1 du bord et peut être relié de façon certaine. Et si les noirs jouent ailleurs que sur l'une des cases notées Y, les blancs jouent en Y1, relié au bord à distance 1 et au pion blanc par un maillon.

Configuration en arche.



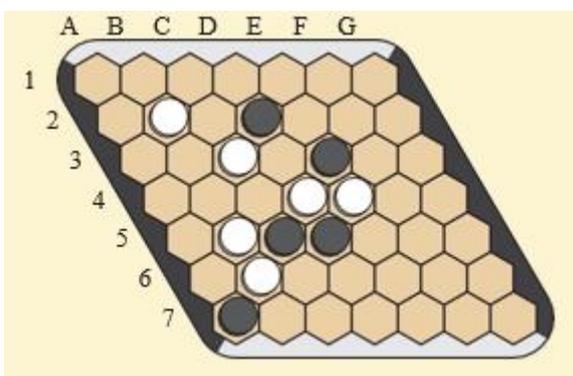
Le pion peut être relié au bord de façon certaine si les dix cases marquées ci-contre sont vides. Encore une fois, si les noirs ne jouent pas sur l'une des cases notées X, alors les blancs relient le bord en jouant en X1 et si les noirs ne jouent pas sur l'une des cases notées Y, les blancs relient le bord par Y1. Notez que la case XY située juste en face du pion blanc sur le bord n'est pas utile dans cette configuration et pourrait donc tout à fait être occupée par un pion noir.

Grand trapèze

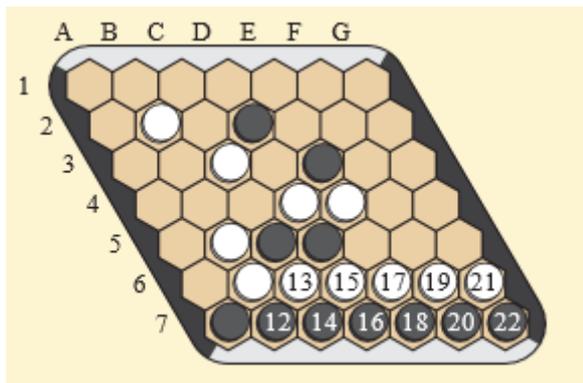


À distance 3, la configuration minimale pour pouvoir relier son pion au bord de façon assurée est dessinée ci-contre. Si les noirs ne jouent pas sur une case X, les blancs relient au bord par X1 à distance 2 du bord en trapèze. Si les noirs ne jouent pas sur une case Y, les blancs relient au bord par Y1 de la même façon. Le seul coup éventuellement ennuyeux pour les blancs est donc la case d'intersection XY. Mais si les noirs jouent sur cette case, les blancs relient au bord par Y2 grâce à la configuration en arche à distance 2.

Échelles



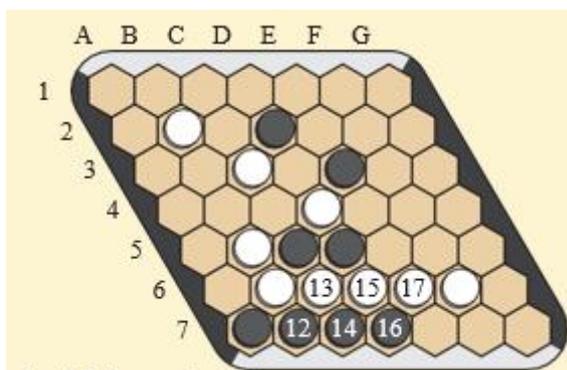
Dans la position suivante, les blancs viennent de jouer 11.b6 : Les blancs sont sur le point de relier le bord du bas mais c'est aux noirs de jouer. La seule défense possible pour les noirs est de jouer 12.b7. Il s'ensuit les coups 13.c6;14.c7; 15.d6;16.d7;17.e6;18.e7.



À chaque coup, les blancs tentent de relier le bord et sont à chaque fois contrés naturellement par les noirs. Une telle séquence de jeu se nomme une **échelle**.

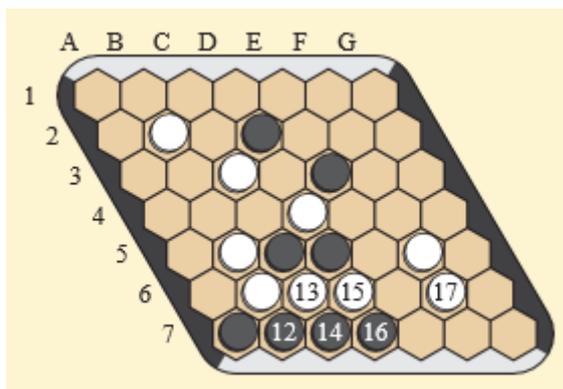
Une échelle se déroule quasiment toujours dans une direction favorable au défenseur. Dans l'exemple ci-dessus, si l'échelle est prolongée jusqu'au bout par 19.f6; 20.f7; 21.g6; 22.g7, alors les noirs gagnent. C'est donc le plus souvent à l'attaquant de prendre l'initiative de rompre l'échelle.

Points d'appui.



Une façon de rompre une échelle est d'avoir au préalable placé un point d'appui. Reprenons le diagramme précédent mais où cette fois les blancs ont un pion en f6.

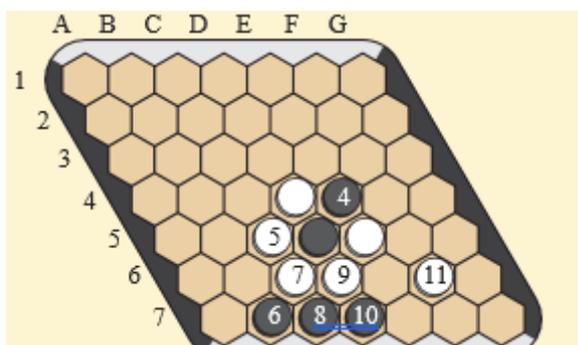
Dans cette configuration les blancs gagnent car après 12.b7;13.c6; 14.c7;15.d6;16.d7;17.e6, ils possèdent deux cases pour relier le bord du bas : e7 et f7.



Un point d'appui peut également se trouver à distance 2 du bord. Par exemple, si le point d'appui se trouve en f5, les noirs jouent 12.b7 et les blancs gagnent par 13.c6;14.c7; 15.d6;16.d7;17.f6 ce dernier pion f6 est alors relié au bord à distance 1 et le point d'appui est relié à l'échelle par un maillon.

Le coup du pêcheur.

Voici un piège classique dans lequel tombent souvent les joueurs débutants. Prenons par exemple, le début de partie suivante sur un plateau de taille 7 :



Le dernier pion blanc e5 est relié au bord par un trapèze. Pour empêcher les blancs de relier leur pion central au bord du bas, les noirs ont envie de jouer 4.e4. C'est une erreur car les blancs jouent alors 5.c5 ce qui force 6.b7 pour empêcher la jonction avec le bord du bas, possible à la fois en b6 et c6. S'ensuit alors une échelle qui relie le bord grâce au point d'appui e5.7.c6;8.c7;9.d6;10.d7;11.f6 et les blancs relient le bord du bas.

Nous allons voir dans la suite quel coup permet de contrer le coup du pêcheur. Saurez- vous le trouver ?

Se ménager plusieurs chemins.

Nous l'avons déjà vu, au jeu de Hex, il faut toujours penser à se construire plusieurs chemins pour arriver au but. Les maillons en sont l'exemple le plus simple : les deux pions peuvent être reliés par deux cases différentes. Le même principe est vrai à plus grande échelle. Les joueurs débutants ont souvent tendance à se focaliser sur le chemin qui leur semble le plus robuste à un moment de la partie. Mis à part dans les fins de partie, il est très rare qu'un chemin puisse être assuré et une telle stratégie est souvent vouée à l'échec.

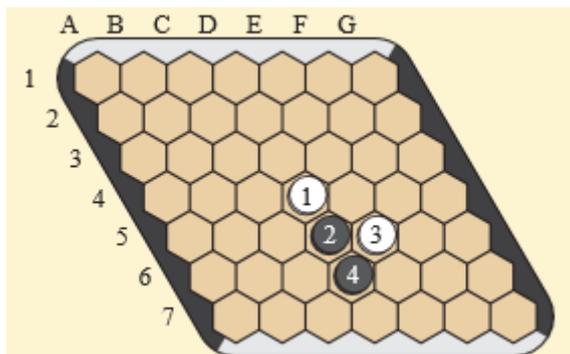
À chaque coup, la bonne question à se poser n'est pas « par où vais-je passer ? » mais plutôt « quel est le coup qui me crée le plus grand réseau possible de chemins de façon à ce que mon adversaire ait le moins de chances de tous les contrer ? ».

Le coup du pêcheur en est un exemple. Lorsque les blancs jouent 3.e5 dans l'exemple précédent, ce n'est ni dans l'objectif précis de passer par e4, ni dans celui de faire un point d'appui en passant par c5. C'est pour avoir les deux possibilités afin d'avoir une réponse adaptée en fonction du jeu de l'adversaire.

Jouer sur les points sensibles de l'adversaire.

Les cases sensibles de l'adversaire sont celles qui sont à l'intersection de plusieurs chemins possibles. Lors d'une phase de jeu défensive, ce sont ces cases qu'il faut repérer en priorité.

Revenons au coup du pêcheur. Dans la configuration après 1.d4;2.d5;3.e5, le bon coup pour les noirs est 4.d6



Ce coup a un double avantage : il se trouve à l'intérieur du trapèze qui relie e5 au bord et il empêche la progression d'une échelle qui passerait par c5. Maintenant, si les blancs jouent 5.e4, les noirs bloquent définitivement le passage par 6.e6. Si les blancs choisissent de relier immédiatement e5 par le trapèze en jouant 5.f6, alors les noirs peuvent désormais jouer 6.e4 sans craindre le passage des blancs par c3.

Conclusion

Faire une conclusion un peu générale pour dire que le jeu de Hex est extrêmement riche et qu'on n'a pas encore parlé des variantes (condenser ce qui est écrit là-dessous).

+ apports Nicolas sur la partie enseignement

[Maarup, p. 45] donne des variantes selon les mouvements, le plateau et les objectifs. Dire quelque part qu'il existe plein de variantes : Bridg-it, Hex 3 joueurs mais pas l'objet de cette réédition. Fera l'objet d'une autre brochure ? A dire en conclusion ou ailleurs.

[Boutin 2019a] : Bridg-it

[Hayward & Toft, p. 110] : le groupe d'étudiants de Fine Hall a créé plusieurs variantes du jeu de Hex. Le 1-2-2 est suggéré par John Tate : le premier joueur place une pierre, ensuite pendant un tour de jeu, un joueur place 2 pierres – ou ne seule, s'il ne reste qu'une case vide.

p. 111 : Rex = Reverse Hex, version misère du Hex, celui qui rejoint ses bords a perdu.

p. 111 = Brig-it inventé par David Gale = relier des points par des traits horizontaux ou verticaux pour relier ses 2 bords. Un tablier de taille $m \times n$ pour Bridt-it correspond à un tablier de taille $2m-1 \times 2n-1$ pour le jeu de Hex. Topologiquement équivalent.

p. 114 : Y (ou Triangle) = la forme du tablier est différente, en triangle et non en losange. Pour gagner le joueur doit joindre les 3 côtés. Apparemment proposée indépendamment par Shannon et John Milnor. Y est plus général que le jeu de Hex et ne peut finir sur un nul non plus.

p. 118 : Poly-Y = créé dans les années 1970 par Irene Verona Schensted, physicienne, fan de Y et de Go. Plateau de forme pentagonale, avec une case pentagonale centrale + des cases pentagonales sur les bords (4 sur chaque bord), mais toutes les autres sont hexagonales... Le but est de s'emparer des coins → un joueur possède un coin s'il a réussi à créer un chemin continu de sa couleur qui connecte au moins 3 côtés, donc 2 sont adjacents aux côtés de la case du coin. (Il faudra mettre une illustration !!).

Quelques défis

Remettre les défis de la brochure initiale du CIJM

Références pour aller plus loin

- Boutin, Michel (2019a). Histoire et diffusion d'un jeu japonais « Gunjin Shogi » et d'un jeu danois « Polygon-Hex ». *Colloque international « Pratiques sportives traditionnelles et tourisme culturel durable » Tamanrasset, 7 au 12 janvier 2019*, pp. 17-49

- Boutin, Michel (2019b). Polygon ou jeu de Hex. *Vers l'Éducation Nouvelle, Céméa*, n°574, avril 2019
- Boutin, Michel (2021). *Jeux sportifs, jeux de société et classifications*. L'Harmattan
- Delahaye, Jean-Paul (2024). Stratégies pour le jeu de Hex infini. *Pour la Science*, n°560, juin 2024, pp. 80-84
- Hayward, Ryan B. & Toft, Bjarne (2019). *Hex : The Full Story*. CRC Press Taylor and Francis Group
- HexWiki : « Computer Hex », https://www.hexwiki.net/index.php/Computer_Hex → noms des programmes et des IA, à jour février 2024
- Le Roux Frédéric (2012). *Le jeu de Hex*, Images des Mathématiques, CNRS
<http://images.math.cnrs.fr/Le-jeu-de-Hex>